Complexes

Terminale S

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

Plan du cours

Historiquement,
on a tout d'abord introduit
$\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels,
dans lequel on sait additionner
et multiplier des nombres
entre eux, tout en restant
dans cet ensemble. Par contre on
a des problèmes lorsque l'on veut
résoudre l'équation $x + a = b$
suivant les valeurs de a et b.

Figure: Jérome Cardan (source Wikipedia)

Historiquement,
on a tout d'abord introduit
$\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels,
dans lequel on sait additionner
et multiplier des nombres
entre eux, tout en restant
dans cet ensemble. Par contre on
a des problèmes lorsque l'on veut
résoudre l'équation $x + a = b$
suivant les valeurs de a et b.
D'où l'introduction
des relatifs au 12e siècle
en Italie et au 14e siècle du zéro.

Figure: Jérome Cardan (source Wikipedia)

Historiquement,
on a tout d'abord introduit
$\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels,
dans lequel on sait additionner
et multiplier des nombres
entre eux, tout en restant
dans cet ensemble. Par contre on
a des problèmes lorsque l'on veut
résoudre l'équation $x + a = b$
suivant les valeurs de a et b.
D'où l'introduction
des relatifs au 12e siècle
en Italie et au 14e siècle du zéro.
Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des
entiers relatifs , on sait résoudre
l'équation $x + a = b$.

Figure: Jérome Cardan (source Wikipedia)

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.
Pour cela on construit un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels, dans lequel l'équation $ax = b$ admet une solution pour toute valeur de $a \neq 0$ et de b.

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.
Pour cela on construit un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels, dans lequel l'équation $ax = b$ admet une solution pour toute valeur de $a \neq 0$ et de b.
On arrive alors à montrer que certains nombres ($\sqrt{2}$, π...) ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une fraction, d'où l'introduction des nombres réels, dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.
Pour cela on construit un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels, dans lequel l'équation $ax = b$ admet une solution pour toute valeur de $a \neq 0$ et de b.
On arrive alors à montrer que certains nombres ($\sqrt{2}$, π...) ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une fraction, d'où l'introduction des nombres réels, dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$.
Dans $\mathbb{R}$, on sait résoudre l'équation $x^2 = a$ pour $a \geqslant 0$ et des équations d'ordre supérieur.

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.
Pour cela on construit un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels, dans lequel l'équation $ax = b$ admet une solution pour toute valeur de $a \neq 0$ et de b.
On arrive alors à montrer que certains nombres ($\sqrt{2}$, π...) ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une fraction, d'où l'introduction des nombres réels, dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$.
Dans $\mathbb{R}$, on sait résoudre l'équation $x^2 = a$ pour $a \geqslant 0$ et des équations d'ordre supérieur.
Jérome Cardan (Pavie, 24 septembre 1501 - Rome, 21 septembre 1576) se rend compte que certaines équations admetttent des solutions réelles mais pour pouvoir les résoudre, il faut à un moment introduit un nombre dont le carré vaut -1.

C'est au 17e siècle
qu'Euler (né le 15 avril 1707
à Bâle et mort le 18 septembre
1783 à Saint-Pétersbourg)
adoptera définitivement
la définition suivante :

Définitions

On appelle i *le nombre tel que :* $i^2 = -1$.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.
y est appelé partie imaginaire de z, que l'on notera $Im(z)$.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.
y est appelé partie imaginaire de z, que l'on notera $Im(z)$.
L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.
y est appelé partie imaginaire de z, que l'on notera $Im(z)$.
L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes.

Définition

Deux nombres complexes sont égaux ssi leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.

Définitions

On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.
y est appelé partie imaginaire de z, que l'on notera $Im(z)$.
L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes.

Définition

Deux nombres complexes sont égaux ssi leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.

Théorème

L'écriture d'un nombre complexe $z = x + iy$ est unique.

Définitions

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.

Définitions

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définitions

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définition

On appelle somme de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

Définitions

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définition

On appelle somme de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$.
Calculer $z + z'$.

Définitions

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définition

On appelle somme de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$.
Calculer $z + z'$.

<u>Solution</u> :$z + z' = 3 + 2i + (4 + 7i) = 7 + 9i$

Définition

On appelle produit *de deux nombres complexes* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *le nombre complexe noté*

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Définition

On appelle produit *de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté*

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Remarque

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et en possédent les propriétés.

Définition

On appelle produit *de deux nombres complexes* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *le nombre complexe noté*

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Remarque

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ *prolongent respectivement l'addition et la multiplication de* $\mathbb{R}$ *et en possédent les propriétés.*

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$

Calculer zz'.

Définition

On appelle produit *de deux nombres complexes* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *le nombre complexe noté*

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Remarque

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et en possédent les propriétés.

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$
Calculer zz'.

Solution : $zz' = (3 + 2i)(4 + 7i) = 12 + 21i + 8i + 14i^2 = -2 + 29i$

Définition

On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z + (-z) = 0$.

Définition

On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z + (-z) = 0$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $-z = -x - iy$.

Définition

On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z + (-z) = 0$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $-z = -x - iy$.

Définition

On appelle différence de deux nombres complexes z et z' le nombre noté $z - z'$ tel que $z - z' = z + (-z')$.

Définition

On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z+(-z)=0$.

Propriété

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe non nul. Alors $-z=-x-iy$.

Définition

On appelle différence de deux nombres complexes z et z' le nombre noté $z-z'$ tel que $z-z'=z+(-z')$.

Propriété

Soit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux nombres complexes non nul. Alors $z-z'=x-x'+i(y-y')$.

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$.

Calculer z-z'.

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$.
Calculer z-z'.

<u>Solution :</u> $z - z' = 3 + 2i - (4 + 7i) = -1 - 5i$.

Définition

On appelle inverse *d'un nombre complexe non nul* z *le nombre noté* $\dfrac{1}{z}$ *et tel que* $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.

Définition

On appelle ***inverse*** *d'un nombre complexe non nul z le nombre noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.*

Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Définition

On appelle inverse d'un nombre complexe non nul z le nombre noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Exemple

$z = 3 + 2i$

Calculer $\dfrac{1}{z}$.

Définition

On appelle inverse d'un nombre complexe non nul z le nombre noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Exemple

$z = 3 + 2i$

Calculer $\dfrac{1}{z}$.

Solution :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$$

Définition

Soit z et z' deux nombres complexes, avec z' non nul. Alors le ***quotient*** *de z par z' noté $\dfrac{z}{z'}$ est le nombre tel que $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.*

Définition

Soit z *et* z' *deux nombres complexes, avec* z' *non nul. Alors le* *quotient* *de* z *par* z' *noté* $\dfrac{z}{z'}$ *est le nombre tel que* $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$

Calculer $\dfrac{z}{z'}$.

Définition

Soit z et z' deux nombres complexes, avec z' non nul. Alors le quotient de z par z' noté $\frac{z}{z'}$ est le nombre tel que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple

$z = 3 + 2i$ *et* $z' = 4 + 7i$
Calculer $\frac{z}{z'}$.

Solution :

$$\frac{z}{z'} = \frac{3+2i}{4+7i} = \frac{(3+2i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)} = \frac{12-21i+8i-14i^2}{16-49i^2} = \frac{26-13i}{65} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Remarque

Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de relation d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, en obéissant à la même règle des signes. En effet, si tel était le cas i^2 serait à la fois positif ... et négatif puisqu'égal à -1.

Plan du cours

Définitions

On munit un plan $\mathcal{P}$ *d'un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$*. On considère un nombre complexe* $z = x + iy$*.*

Définitions

On munit un plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère un nombre complexe $z = x + iy$.
On peut toujours considérer que l'on peut associer au nombre z le point $M(x; y)$. On dit alors que z est l'affixe de M et l'on note $M(z)$.

Définitions

On munit un plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère un nombre complexe $z = x + iy$.
On peut toujours considérer que l'on peut associer au nombre z le point $M(x; y)$. On dit alors que z est l'affixe de M et l'on note $M(z)$.
On peut aussi considérer que l'on peut associer au nombre z le vecteur $\vec{v}(x\,;\,y)$. On dit alors que z est l'affixe de $\vec{v}$ et l'on note $\vec{v}(z)$.

Définitions

On munit un plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère un nombre complexe $z = x + iy$.
On peut toujours considérer que l'on peut associer au nombre z le point $M(x; y)$. On dit alors que z est l'affixe de M et l'on note $M(z)$.
On peut aussi considérer que l'on peut associer au nombre z le vecteur $\vec{v}(x\,;\,y)$. On dit alors que z est l'affixe de $\vec{v}$ et l'on note $\vec{v}(z)$.
Le plan $\mathcal{P}$ est appelé plan complexe.

Vocabulaire

L'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_1})$ est l'ensemble des points M d'affixe réelle, on l'appelle donc l'axe des réels.
L'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_2})$ est l'ensemble des points M d'affixe imaginaire pur, on l'appelle donc l'axe des imaginaires.

Propriété

(i) Soit $\vec{u}(z)$ *et* $\vec{v}(z')$*, alors* $\vec{u}+\overrightarrow{v}(z+z')$.

Propriété

(i) Soit $\vec{u}(z)$ *et* $\vec{v}(z')$, *alors* $\vec{u}+\overrightarrow{v}(z+z')$.

(ii) Soit $A(z)$ *et* $B(z')$ *alors* $\overrightarrow{AB}(z'-z)$ *et I milieu de* $[AB]$ *a pour affixe :* $\dfrac{z+z'}{2}$

Propriété

(i) Soit $\vec{u}(z)$ *et* $\vec{v}(z')$*, alors* $\vec{u}+\overrightarrow{v}(z+z')$*.*

(ii) Soit $A(z)$ *et* $B(z')$ *alors* $\overrightarrow{AB}(z'-z)$ *et I milieu de* $[AB]$ *a pour affixe :* $\dfrac{z+z'}{2}$

(iii) Soit $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)$ n *points pondérés du plan, d'affixes respectives* $z_{A_1},\ z_{A_2},\ \dots,\ z_{A_n}$*, tels que* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\neq 0$*.*

Alors en notant G leur barycentre, G a pour affixe :

$$z_G=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k z_{A_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}.$$

Propriété

(i) Soit $\vec{u}(z)$ *et* $\vec{v}(z')$*, alors* $\vec{u}+\overrightarrow{v}(z+z')$*.*
(ii) Soit $A(z)$ *et* $B(z')$ *alors* $\overrightarrow{AB}(z'-z)$ *et I milieu de* $[AB]$ *a pour affixe :* $\dfrac{z+z'}{2}$
(iii) Soit $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ n *points pondérés du plan, d'affixes respectives* z_{A_1}, z_{A_2}, ..., z_{A_n}, *tels que* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$.
Alors en notant G leur barycentre, G a pour affixe :

$$z_G=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k z_{A_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}.$$

Preuve

Immédiates en utilisant les affixes des vecteurs.□

Plan du cours

Définition

On appelle *nombre conjugué* *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *le nombre complexe noté* $\bar{z} = x - iy$.

Définition

On appelle *nombre conjugué* *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *le nombre complexe noté* $\bar{z} = x - iy$.

Exemple

Le conjugué de $3 + 7i$ *est* $3 - 7i$.

Définition

On appelle nombre conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ *le nombre complexe noté* $\bar{z} = x - iy$.

Exemple

Le conjugué de $3 + 7i$ *est* $3 - 7i$.

Interprétation géométrique

Soit $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe. On note $\mathrm{M'}(\bar{z})$. Alors M' est l'image de M par rapport à l'axe des réels. L'application $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M'}(\bar{z})$ est la symétrie d'axe $(O, \vec{e_1})$.

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y') = \overline{z}+\overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(xy'+x'y)} = xx'-yy'-i(xy'+x'y) = x(x'-iy')-iy(-iy'+x')$, *d'où :*
$\overline{z \times z'} = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$

Propriétés

Soit z *et* z' *deux complexes.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y') = \overline{z}+\overline{z'}$

(iii) $\overline{z\times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(xy'+x'y)} = xx'-yy'-i(xy'+x'y) = x(x'-iy')-iy(-iy'+x')$, d'où :

$\overline{z\times z'} = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z}\times\overline{z'}$

Propriétés

Soit z *et* z' *deux complexes.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y') = \overline{z}+\overline{z'}$

(iii) $\overline{z\times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(xy'+x'y)} = xx'-yy'-i(xy'+x'y) = x(x'-iy')-iy(-iy'+x')$, *d'où :* $\overline{z\times z'} = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z}\times\overline{z'}$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
(iii) $\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y') = \overline{z}+\overline{z'}$

(iii) $\overline{z\times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(xy'+x'y)} = xx'-yy'-i(xy'+x'y) = x(x'-iy')-iy(-iy'+x')$, *d'où :* $\overline{z\times z'} = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z}\times\overline{z'}$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y') = \overline{z}+\overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(xy'+x'y)} = xx'-yy'-i(xy'+x'y) = x(x'-iy')-iy(-iy'+x')$, d'où : $\overline{z \times z'} = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

(vi) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{x + x' + i(y + y')} = x + x' - i(y + y') = \overline{z} + \overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} = xx' - yy' - i(xy' + x'y) = x(x' - iy') - iy(-iy' + x')$, d'où : $\overline{z \times z'} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$

Propriétés

Soit z *et* z' *deux complexes.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

(vi) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$

(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x - (-y)i = x + iy$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
(vi) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$
(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x - iy} = x - (-y)i = x + iy$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} =$
$x + x' - i(y+y') = \overline{z} + \overline{z'}$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
(vi) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$
(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x - (-y)i = x + iy$
(ii) $\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} =$
$x + x' - i(y+y') = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} =$
$xx' - yy' - i(xy' + x'y) = x(x' - iy') - iy(-iy' + x')$, *d'où :*
$\overline{z \times z'} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$

Preuve

(iv) Pour $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \overline{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{(x+iy)(x-iy)}{(x^2+y^2)(x-iy)} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(x-iy)} = \frac{1}{\overline{z}}$

Preuve

(iv) Pour $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} =$
$\overline{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} =$
$\frac{(x+iy)(x-iy)}{(x^2+y^2)(x-iy)} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(x-iy)} = \frac{1}{\overline{z}}$

(v) Pour $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Preuve

(vi) On commence par établir le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ *:*
Vrai pour les premiers termes : immédiat pour $n = 0$, $n = 1$, *établi pour* $n = 2$
On suppose que cela est vrai pour n, *c'est à dire que :* $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
On a : $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n}\,\overline{z} = (\bar{z})^n \overline{z} = (\bar{z})^{n+1}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a bien* $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}^-$, *on pose* $n' = -n$
On a : $\overline{z^n} = \overline{z^{-n'}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{n'}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{n'}}} = \dfrac{1}{(\bar{z})^{n'}} = (\bar{z})^{-n'} = (\bar{z})^n . \square$

Propriété

Soit z un complexe.

$$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ et } Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Propriété

Soit z un complexe.
$Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Preuve

On pose $z = x + iy$. On a :
$$x = \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{z+\overline{z}}{2}$$
$$y = \frac{1}{2i} \times 2iy = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.\square$$

Conséquences

Soit z *un complexe.*

$z \in \mathbb{R}$ *ssi* $z = \overline{z}$

$z \in i\mathbb{R}$ *(z est imaginaire pur) ssi* $z = -\overline{z}$

Conséquences

Soit z *un complexe.*

$z \in \mathbb{R}$ *ssi* $z = \overline{z}$

$z \in i\mathbb{R}$ *(z est imaginaire pur) ssi* $z = -\overline{z}$

Preuve

Immédiate$\square$

Plan du cours

Définition

Soit a, b et c trois réels, a non nul. On appelle équation du second dégré à coefficients réels toute équation du type $az^2 + bz + c = 0$, où z est l'inconnue.

Définition

Soit a, b et c trois réels, a non nul. On appelle équation du second dégré à coefficients réels toute équation du type $az^2 + bz + c = 0$, où z est l'inconnue.

Remarque

On sait déjà résoudre une telle équation dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit a, b et c trois réels, a non nul. On appelle équation du second dégré à coefficients réels toute équation du type $az^2 + bz + c = 0$, où z est l'inconnue.

Remarque

On sait déjà résoudre une telle équation dans $\mathbb{R}$.

Définition

Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$, c'est trouver tous les nombres complexes qui rendent l'égalité vraie. Un tel nombre est appelé solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation.

Résolution :

On a :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Résolution :

On a :

$$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, que l'on appelle discriminant de $az^2+bz+c=0$. Ce discriminant est réel puisque a, b et c sont trois réels.

Résolution :

On a :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appelle discriminant de $az^2 + bz + c = 0$. Ce discriminant est réel puisque a, b et c sont trois réels.

D'où : $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Si $\Delta > 0$, alors

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$ et

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions réelles

$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, alors
$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ et
l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions réelles
$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ et l'équation
$az^2 + bz + c = 0$ admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, on a : $\Delta = i^2(-\Delta)$. Alors :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2}\right),$$ d'où :

Si $\Delta < 0$, on a : $\Delta = i^2(-\Delta)$. Alors :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2}\right), \text{ d'où :}$$

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right) \text{ et}$$

donc l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, on a : $\Delta = i^2(-\Delta)$. Alors :

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2}\right)$$, d'où :

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right)$$ et

donc l'équation $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On remarque que : $z_2 = \overline{z_1}$.

Ainsi dans $\mathbb{C}$, az^2+bz+c se factorise toujours.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$

Solution : Le discriminant de $z^2 - 4z + 13 = 0$ est :
$\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$, donc l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i$ et $z_2 = 2 + 3i$.

Plan du cours

Plan du cours

Définition

On appelle module *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *le nombre noté* $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Définition

On appelle module *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *le nombre noté* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Remarque

En posant $z = x + iy$*, on a :*
$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$.
Donc l'écriture $\sqrt{z\overline{z}}$ *a un sens.*

Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z = x + iy$ le nombre noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Remarque

En posant $z = x + iy$, on a :
$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$.
Donc l'écriture $\sqrt{z\overline{z}}$ a un sens.

Propriétés

(i) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
(ii) $|zz'| = |z||z'|$
(iii) $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
(iv) $Re(z) \leqslant |z|$
(v) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$
(i) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$

(i) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$

(ii) $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\bar{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$

(i) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$

(ii) $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\bar{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$

(iii) $|\dfrac{z}{z'}| = \sqrt{\dfrac{z}{z'}\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}} = \sqrt{\dfrac{z\bar{z}}{z'\overline{z'}}} = \dfrac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sqrt{z'\overline{z'}}} = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Preuve

On pose $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$

(i) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$

(ii) $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\bar{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$

(iii) $|\frac{z}{z'}| = \sqrt{\frac{z}{z'}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}} = \sqrt{\frac{z\bar{z}}{z'\overline{z'}}} = \frac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sqrt{z'\overline{z'}}} = \frac{|z|}{|z'|}$

(iv) $Re(z) = x \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

Preuve

(v) On peut approcher la démonstration en notant M(z) et M'(z')
Soit S le point tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. *S(z+z') et l'on a*
$OS \leqslant OM + OM'$ *donc* $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
Figure à faire
$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{z + z'} = z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} =$
$|z|^2 + 2Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$
$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$, *d'où le résultat.* $\square$

Preuve

(v) On peut approcher la démonstration en notant M(z) et M'(z')
Soit S le point tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. *S(z+z') et l'on a* $OS \leqslant OM + OM'$ *donc* $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
Figure à faire
$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{z+z'} = z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'} =$
$|z|^2 + 2Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$
$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$, *d'où le résultat.*$\square$

Remarque

Soit $M(z)$ *dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé avec* $z = x + iy$.
$\overrightarrow{OM}(z)$ *et* $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.

Plan du cours

Définition

On appelle argument *d'un nombre complexe* $z = x + iy$*, noté* $arg(z)$ *l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$*, où M est le point du plan complexe d'affixe* z*.*

Définition

On appelle argument *d'un nombre complexe* $z = x + iy$*, noté* $arg(z)$ *l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$*, où M est le point du plan complexe d'affixe* z*.*

Remarque

Il existe une infinité d'argument pour un nombre complexe donné. On parle d'argument principal pour l'argument ayant pour valeur comprise dans $]-\pi;\pi]$*.*

Propriété

Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe non nul.*
Un argument θ *défini à* 2π *de* z *est donné par :*
$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Ainsi : $z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe non nul.*
Un argument θ *défini à* 2π *de* z *est donné par :*
$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Ainsi : $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et dont un argument est θ, la forme trigonométrique de z est son écriture :
$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Propriété

Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe non nul.*
Un argument θ *défini à* 2π *de* z *est donné par :*
$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Ainsi : $z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et dont un argument est θ, la forme trigonométrique de z est son écriture :
$z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.

Figure résumé à faire (module, argument, lien forme algébrique forme trigo)

Propriété

Soit $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$ *un nombre complexe avec* $r > 0$.
Alors $|z| = r$ *et* $arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Propriété

Soit $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$ *un nombre complexe avec* $r > 0$.
Alors $|z| = r$ *et* $arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Preuve

On a : $|z|^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2$,
d'où, comme $r > 0$, $|z| = r$.
Soit θ' *un argument de* z.
D'après la propriété précédente, on a : $\cos\theta' = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$ *et*
$\sin\theta' = \dfrac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$, *donc* $\theta' = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\square$

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*
Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$*,*

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*
Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*

Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*
Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(iv) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*

Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(v) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Propriétés

Soit z *et* z' *deux nombres complexes non nuls.*

Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

(v) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(vi) $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *où* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

On pose $\rho = |z|$. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.
(i) Soit ϕ *un argument de* $\bar{z}$. *Alors* $\cos\phi = \cos\theta$ *et* $\sin\phi = -\sin\theta$, *d'où :* $\phi = -\theta[2\pi]$.

Preuve

On pose $\rho = |z|$. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.
(i) Soit ϕ *un argument de* $\bar{z}$. *Alors* $\cos\phi = \cos\theta$ *et* $\sin\phi = -\sin\theta$, *d'où :* $\phi = -\theta[2\pi]$.
(ii) On a : $-z = -\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, *d'où en notant* ψ *un argument de* $-z$, *on a :* $\cos\psi = -\cos\theta$ *et* $\sin\psi = -\sin\theta$, *donc* $\psi = \theta + \pi[2\pi]$.
On pose $\rho' = |z'|$. $z' = \rho'(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Alors :*

Preuve

On pose $\rho = |z|$. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.
(i) Soit ϕ *un argument de* $\bar{z}$. *Alors* $\cos\phi = \cos\theta$ *et* $\sin\phi = -\sin\theta$, *d'où :* $\phi = -\theta[2\pi]$.
(ii) On a : $-z = -\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, *d'où en notant* ψ *un argument de* $-z$, *on a :* $\cos\psi = -\cos\theta$ *et* $\sin\psi = -\sin\theta$, *donc*
$\psi = \theta + \pi[2\pi]$.
On pose $\rho' = |z'|$. $z' = \rho'(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Alors :*
(iii) $zz' = \rho\rho'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') =$
$\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$, *d'où :*
$zz' = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$
En notant ν *un argument de* zz', *on a :* $\cos\nu = \cos(\theta+\theta')$ *et* $\sin\nu = \sin(\theta+\theta')$, *d'où :* $\nu = \theta + \theta'[2\pi]$

Preuve

(iv) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \dfrac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)$, *d'où en notant* ϕ' *un argument de* $\dfrac{1}{z}$. *Alors* $\cos\phi' = \cos\theta$ *et* $\sin\phi' = -\sin\theta$, *d'où :* $\phi' = -\theta[2\pi]$.

Preuve

(iv) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \dfrac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)$, *d'où en notant* ϕ' *un argument de* $\dfrac{1}{z}$. *Alors* $\cos\phi' = \cos\theta$ *et* $\sin\phi' = -\sin\theta$, *d'où :*
$\phi' = -\theta[2\pi]$.

(v) $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$, *d'où :*
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)[2\pi] = \arg(z) - arg(z')[2\pi]$

Preuve

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$*. Montrons par récurrence que* $\arg(z^n) = n\theta[2\pi]$.
Pour $n = 0$, $z^0 = 1$, *d'où* $\arg z^0 = 0[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 0.*
Pour $n = 1$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, *d'où :* $\arg z^1 = 1 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 1.*

Preuve

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$*. Montrons par récurrence que* $\arg(z^n) = n\theta[2\pi]$.
Pour $n = 0$, $z^0 = 1$*, d'où* $\arg z^0 = 0[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 0.*
Pour $n = 1$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$*, d'où :* $\arg z^1 = 1 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 1.*
Pour $n = 2$, $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ *(cf preuve (iii)), d'où :* $\arg z^2 = 2 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 2.*

Preuve

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$*. Montrons par récurrence que* $\arg(z^n) = n\theta[2\pi]$*.*
Pour $n = 0$*,* $z^0 = 1$*, d'où* $\arg z^0 = 0[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 0.*
Pour $n = 1$*,* $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$*, d'où :* $\arg z^1 = 1 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 1.*
Pour $n = 2$*,* $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ *(cf preuve (iii)), d'où :* $\arg z^2 = 2 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 2.*
On suppose la propriété vraie au rang n*, montrons qu'elle est encore vraie au rang* $n + 1$*.*

Preuve

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$*. Montrons par récurrence que* $\arg(z^n) = n\theta[2\pi]$*.*
Pour $n = 0$, $z^0 = 1$*, d'où* $\arg z^0 = 0[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 0.*
Pour $n = 1$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$*, d'où :* $\arg z^1 = 1 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 1.*
Pour $n = 2$, $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ *(cf preuve (iii)), d'où :* $\arg z^2 = 2 \times \theta[2\pi]$ *et donc la propriété est vraie au rang 2.*
On suppose la propriété vraie au rang n*, montrons qu'elle est encore vraie au rang* $n+1$*.*
$z^{n+1} = z^n z$*, donc d'après (iii), on a :* $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n) + \arg(z)[2\pi] = n\arg(z) + \arg(z)[2\pi] = (n+1)\arg(z)[2\pi]$*, et donc la propriété est encore vraie au rang* $n+1$*.*
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. *On pose* $n' = -n$. *On a :* $n' \in \mathbb{N}$.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. *On pose* $n' = -n$. *On a :*$n' \in \mathbb{N}$.

D'où : $\arg(z^n) = \arg\left(z^{-n'}\right) = -\arg(z^{n'})[2\pi]$ *d'après le (iv).*

Preuve

Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. *On pose* $n' = -n$. *On a :*$n' \in \mathbb{N}$.
D'où : $\arg\left(z^n\right) = \arg\left(z^{-n'}\right) = -\arg(z^{n'})[2\pi]$ *d'après le (iv).*
Puis : $\arg\left(z^n\right) = -n' \arg(z)[2\pi]$, *d'après ce que l'on vient de montrer pour* $n' \in \mathbb{N}$.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. *On pose* $n' = -n$. *On a :* $n' \in \mathbb{N}$.
D'où : $\arg\left(z^n\right) = \arg\left(z^{-n'}\right) = -\arg(z^{n'})[2\pi]$ *d'après le (iv).*
Puis : $\arg\left(z^n\right) = -n' \arg(z)[2\pi]$, *d'après ce que l'on vient de montrer pour* $n' \in \mathbb{N}$.
Donc : $\arg\left(z^n\right) = n \arg(z)[2\pi]$. *D'où (vi).*$\square$

Théorème

Soit $A(z_A)$ *et* $B(z_B)$ *deux points du plan complexe. Alors :*
$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)\,[2\pi]$.

Théorème

Soit $A(z_A)$ *et* $B(z_B)$ *deux points du plan complexe. Alors :*
$\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)[2\pi]$.

Preuve

On note $M(z_M)$ *le point du plan complexe tel que* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Alors :
$\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \arg\left(z_M\right)[2\pi] = \arg\left(z_B - z_A\right)[2\pi]$.

Théorème

Soit $A(z_A)$ *et* $B(z_B)$ *deux points du plan complexe. Alors :*
$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) [2\pi]$.

Preuve

On note $M(z_M)$ *le point du plan complexe tel que* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Alors :
$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi] = \arg\left(z_M\right) [2\pi] = \arg\left(z_B - z_A\right) [2\pi]$.

Théorème

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ *et* $D(z_D)$ *quatre points du plan complexe. Alors :* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{e_1}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{CD}\right)\,[2\pi]\\
&= -\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{CD}\right)\,[2\pi]\\
&= -\arg(z_B-z_A)+\arg(z_D-z_C)[2\pi]\\
&= \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Propriété

(Formule de Moivre (né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres))
Pour tout entier naturel n *et tout nombre réel* θ*, on a :*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique

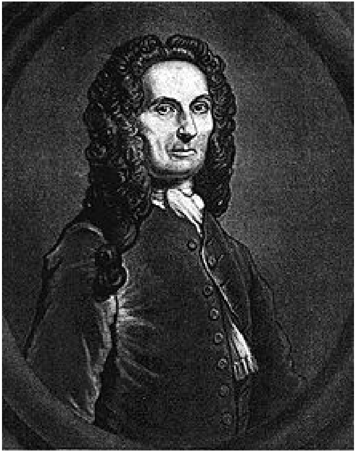

Figure: Moivre (source Wikipedia)

Propriété

(Formule de Moivre (né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres))
Pour tout entier naturel n *et tout nombre réel* θ*, on a :*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Preuve

Immédiate avec ce qui précéde $\cos\theta + i\sin\theta$ *étant un nombre complexe de module 1 et dont un argument est* θ.$\square$

Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique

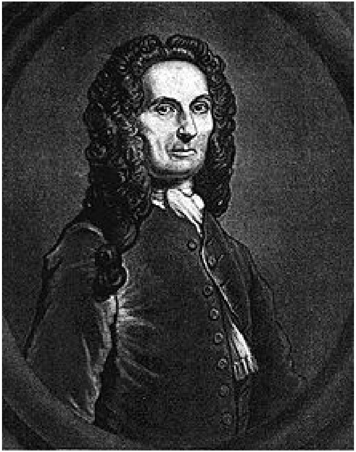

Figure: Moivre (source Wikipedia)

Exemple

Exprimer $\cos(3\theta)$ *en fonction de* $\cos\theta$ *et* $\sin(3\theta)$ *en fonction de* $\sin\theta$*.*

Exemple

Exprimer $\cos(3\theta)$ *en fonction de* $\cos\theta$ *et* $\sin(3\theta)$ *en fonction de* $\sin\theta$*.*

Résolution : On a :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) & = & (\cos\theta+i\sin\theta)^3 \\
 & = & \cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta \\
 & = & \cos^3\theta+3i(1-\sin^2\theta)\sin\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\
 & & -i\sin^3\theta \\
 & = & 4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)
\end{array}$$

Et donc en identifiant parties réelles et imaginaires, on a :
$\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ et $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

Plan du cours

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

Considérons l'application, $\phi : \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.

Soit $\theta' \in \mathbb{R}$

On a : $\phi(\theta + \theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') =$
$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

Considérons l'application, $\phi : \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.

Soit $\theta' \in \mathbb{R}$

On a : $\phi(\theta + \theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.

D'où :

$$\begin{aligned}\phi(\theta + \theta') &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + \sin\theta(i\cos\theta' - \sin\theta') \\ &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + i\sin\theta(\cos\theta' + i\sin\theta')\end{aligned}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$
Considérons l'application, $\phi : \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.
Soit $\theta' \in \mathbb{R}$
On a : $\phi(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') =$
$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.
D'où :

$$\begin{aligned}\phi(\theta+\theta') &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + \sin\theta(i\cos\theta' - \sin\theta')\\ &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + i\sin\theta(\cos\theta' + i\sin\theta')\end{aligned}$$

$\phi(\theta+\theta') = \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') +$
$i\sin\theta((\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\theta' + i\sin\theta') = \phi(\theta)\phi(\theta')$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$
Considérons l'application, $\phi : \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.
Soit $\theta' \in \mathbb{R}$
On a : $\phi(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') =$
$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.
D'où :

$$\begin{aligned}\phi(\theta+\theta') &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + \sin\theta(i\cos\theta' - \sin\theta') \\ &= \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') + i\sin\theta(\cos\theta' + i\sin\theta')\end{aligned}$$

$\phi(\theta+\theta') = \cos\theta(\cos\theta' + i\sin\theta') +$
$i\sin\theta((\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\theta' + i\sin\theta') = \phi(\theta)\phi(\theta')$.
Et donc ϕ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.
On pose donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\phi(\theta) = e^{i\theta}$.

Notation d'Euler

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

(iv) $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z' = \rho' e^{i\theta'}$ *deux nombres complexes non nuls.*
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z' = \rho' e^{i\theta'}$ *deux nombres complexes non nuls.*
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
(iv) $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$

Notation

Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z' = \rho' e^{i\theta'}$ *deux nombres complexes non nuls.*

Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

(iv) $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

Immédiate en s'aidant de la forme trigonométrique$\square$

Exemple

$z = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $z' = 3\frac{\sqrt{2}}{2} - i3\frac{\sqrt{2}}{2}$

Mettre z *et* z' *en notation d'Euler.*

Calculer zz', $\frac{z}{z'}$ *et* $\frac{1}{z}$

Exemple

$z = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $z' = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Mettre z *et* z' *en notation d'Euler.*

Calculer zz', $\dfrac{z}{z'}$ *et* $\dfrac{1}{z}$

Solution :

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z' = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$zz' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 6e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Propriété

Soit θ *une nombre réel. On a :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Propriété

Soit θ une nombre réel. On a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve

On a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *et*
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$, *d'où le résultat par somme et différence.* $\square$

Exemple

Linéariser $\cos^3 \theta$

Exemple

Linéariser $\cos^3\theta$

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}+3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Plan du cours

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $|z-a|=r$ *, où* $a \in \mathbb{C}$ *et* $r \geqslant 0$ *est un cercle de centre* $A(a)$ *et de rayon* r.

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $|z-a|=r$ *, où* $a \in \mathbb{C}$ *et* $r \geqslant 0$ *est un cercle de centre* $A(a)$ *et de rayon* r*.*

Preuve

$|z-a|=r$ *équivaut à* $AM=r$ *ou encore à M appartient au cercle de centre A de rayon* r*.*

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = |z-b|$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ est la médiatrice de [AB]

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = |z-b|$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ est la médiatrice de [AB]

Preuve

$|z-a| = |z-b|$ *équivaut à* $AM = BM$ *ou encore à M appartient à la médiatrice de [AB].*

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $\arg(z-a)=\theta$ *, où* $a\in\mathbb{C}$ *et* $\theta\in\mathbb{R}$ *est la demi-droite d'origine A (A non inclus) dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{v}$*, tel que* $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{v})=\theta[2\pi]$

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $\arg(z-a) = \theta$ *, où* $a \in \mathbb{C}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *est la demi-droite d'origine A (A non inclus) dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{v}$*, tel que* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = \theta[2\pi]$

Preuve

$\arg(z-a) = \theta$ *équivaut à* $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}\right) = \theta[2\pi]$ *ou encore à M appartient à la demi-droite passant par A, dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{v}$*, tel que* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = \theta[2\pi]$.

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ *, où* $a\in\mathbb{C}$ *et* $b\in\mathbb{C}$ *et* $z\neq a$ *et* $z\neq b$ *est un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.*

Propriété

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *, où* $a \in \mathbb{C}$ *et* $b \in \mathbb{C}$ *et* $z \neq a$ *et* $z \neq b$ *est un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.*

Preuve

$\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *équivaut à* $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ *ou encore à M appartient au demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.*

X.O.B.