

---

---

# Éléments de probabilité.

---

---

## 1. Généralités

Les probabilités s'occupent de phénomènes aléatoires, c'est à dire qui sont liés au hasard.

**Définition :** On appelle expérience aléatoire , une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire.

Les résultats possibles d'une épreuve de l'expérience aléatoire sont appelés les issues.

Mathématiquement, pour modéliser une expérience aléatoire, on représente la globalité des issues par un ensemble appelé univers et noté  $\Omega$  ; chacun des éléments de cet ensemble représentant une issue possible, ces issues étant toutes possibles et incompatibles entre elles deux à deux.

Le choix d'un tel ensemble n'est pas unique.

**Exemples:**

Jet d'un dé à six faces:  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Jet d'une pièce :  $\Omega = \{pile, face\}$

**Définition :** On appelle événement la réalisation d'une propriété lors d'une expérience aléatoire. Pour un univers déterminé, on appelle aussi événement l'ensemble des issues qui réalisent cette propriété. Lors d'une épreuve, en fonction de l'issue la propriété sera réalisée ou non.

**Exemple:**

Lorsque l'on jette un dé à six faces numérotées de 1 à 6, la propriété « être un nombre impair » correspond à l'événement A « le jet de dé a donné un nombre impair » ; il est réalisé pour les issues 1; 3 et 5

Finalement on peut donner la définition suivant d'un événement :

**Définition :** On appelle événement tout sous ensemble A de l'univers.

**Exemple:**

En choisissant comme univers :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  lors du lancer d'un dé à 6 faces, l'événement A correspondant à la propriété « le nombre sorti est impair » sera le sous ensemble  $A = \{1; 3; 5\}$ .

**Définition :** On dit qu'un événement A est élémentaire, si une seule issue le réalise.

**Définition :**  $\Omega$  est l'événement certain et  $\emptyset$  l'événement impossible.

L'événement  $\bar{A}$  est l'événement qui a lieu quand l'événement A n'a pas lieu.

L'événement  $A \cup B$  est l'événement qui a lieu quand l'événement A ou (non exclusif) l'événement B a lieu

L'événement  $A \cap B$  est l'événement qui a lieu quand l'événement A et l'événement B ont lieu simultanément.

Si  $A \cap B = \emptyset$  , alors les événements A et B sont dits incompatibles: cela veut dire qu'ils ne peuvent pas avoir lieu simultanément.

**Exemples:**

- Toujours, en lançant un dé, l'événement  $\bar{A}$  correspondant à la propriété « le chiffre sorti est pair » est l'évènement contraire de l'évènement A associé à la propriété « le chiffre sorti est impair ».
- Dans le tirage au sort d'une carte d'un jeu de 32 cartes, l'événement  $A \cup B$  , constitué de l'évènement A associé à la propriété « un roi est sorti » et de l'évènement B associé à « la couleur sortie est rouge », est le sous ensemble  $A \cup B = \{RCa; RCo, RTr, RPi, DCa, DCo, VCa, VCo, 10Ca, 10Co, 9Ca, 9Co, 8Ca, 8Co, 7Ca, 7Co, ACa, ACo\}$  par contre l'événement  $A \cap B = \{RCa, RCo\}$

Les évènements C : « la carte sortie est un trèfle » et l'évènement D : « la carte sortie est un cœur » sont incompatibles.

## 2. Échantillonnage et fréquences

On effectue une expérience aléatoire  $n$  fois et l'on regarde si l'évènement A est réalisé. On note  $n_A$  le nombre de fois où c'est le cas.

**Définition :** On appelle fréquence d'apparition de A pour  $n$  répétitions de l'expérience aléatoire le nombre  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ .

Les variations de fréquence d'apparition obtenues lors de la répétition de deux expériences avec le même nombre d'essais, sont appelées les fluctuations d'échantillonnage.

Ces fluctuations d'échantillonnage diminuent lorsque la taille des échantillons grandit.

### Propriété des fréquences

1.  $f_n(\Omega) = 1$
2. Pour tout évènement A, on a :  $0 \leq f_n(A) \leq 1$
3. Soit A et B deux évènements incompatibles, alors :  $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ .

**Approche fréquentiste des probabilités :** Lorsque  $n$  devient grand la fréquence d'apparition de A,  $f_n(A)$ , tend vers un nombre noté  $p(A)$  appelé probabilité de A.

**Remarque :** On montre que la probabilité que  $f_n(A)$  soit comprise entre  $p(A) - \frac{1}{\sqrt{n}}$  et

$p(A) + \frac{1}{\sqrt{n}}$  est :

- de 90 % pour tout  $n$  ;
- de 93% pour  $n$  supérieur à 25 ;
- de 95% pour  $n$  supérieur à 500.

Ce critère permet de fournir un moyen de contrôler la validité d'une modélisation.

Par exemple, un dé à six faces est lancé 1000 fois. La fréquence d'apparition du 6 est de 220.

Si le dé est non truqué, la probabilité d'apparition du 6 serait de  $1/6$ . L'intervalle de dispersion

serait  $\left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{1000}}; \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right]$ , soit approximativement  $[0,135; 0,198]$ .

La fréquence d'apparition du 6 étant de 0,22 il est peu plausible que le dé soit non truqué.

Un modèle où la probabilité d'apparition du 6 serait de 0,22 sera certainement plus approprié.

**Définition :** On considère une expérience aléatoire, d'issues  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ .

Lorsqu'à chaque modalité  $x_i$  on associe un nombre  $p_i$  positif pour  $i$  variant de 1 à  $n$ , telles

que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , on dit que l'on a une loi de probabilité sur  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ .

On réalise une modélisation de l'expérience aléatoire lorsque l'on a choisit sur un tel ensemble une loi de probabilité.

### Exemple :

Lancé d'un dé à six faces :

On peut choisir comme loi de probabilité :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ou encore celle-ci :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Ou n'importe laquelle qui collera à la réalité.

Dans le dernier cas, on tient compte du fait que le dé est truqué !

**Définition :** On dit qu'une loi de probabilité définit pour une expérience aléatoire de modalités  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  est équirépartie si chaque modalité a la même probabilité. On parle alors d'équiprobabilité.

**Propriété :** Dans ce cas,  $p_i = \frac{1}{n}$

### 3. Probabilité

La démarche précédente nous permet d'aboutir à une première approche d'une probabilité. Nous donnons maintenant une définition plus formelle, qui s'affranchit de l'aspect expérimental.

**Définition d'une probabilité :** Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle probabilité, une application P qui associe à chaque événement A de  $\Omega$  un nombre réel P(A) de [0;1], et qui soit telle que:

- >  $P(\Omega) = 1$
- > Pour tout événement A tel que :  $A \subset \Omega$  ,  $P(A) \geq 0$  .
- > Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des événements deux à deux incompatibles, alors:  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$  .

**Propriété :** Soit  $\Omega$  un univers fini, sur lequel on définit une probabilité P. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires  $\omega_i$  qui le constituent.

**Exemple :**

Revenons au lancer de dé, dont la loi de probabilité est :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Alors la probabilité de l'événement A : « le nombre sorti est impair » est :

$$p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{3 \times 1}{6} = \frac{1}{2}$$

Si maintenant le dé est truqué et suit la loi de probabilité :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Alors la probabilité de l'événement A : « le nombre sorti est impair » est :

$$p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

**Propriétés :** On a alors:

- 1/  $P(\emptyset) = 0$
- 2/  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 3/  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 4/ Si  $A \subset B$  , alors  $P(A) \leq P(B)$  .

**Preuve :**

1.  $\emptyset$  et  $\Omega$  sont deux événements incompatibles, d'où :

$P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1$  et  $P(\emptyset) = 0$ .

2. A et  $\bar{A}$  sont deux événements contraires et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ , d'où :  $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$  d'où le résultat.

3. Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors A et B sont deux événements incompatibles et  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  et comme  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ , la formule est prouvée.

Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , soit  $A_1$  l'événement qui a lieu lorsque A a lieu mais quand B n'est pas réalisé.

Alors  $A_1$  et B sont deux événements incompatibles et  $A \cup B = A_1 \cup B$ , d'où :

$$P(A \cup B) = P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) \quad (1)$$

On a :  $A = A_1 \cup (A \cap B)$ , avec  $A_1$  et  $A \cap B$  incompatibles, d'où :  $P(A) = P(A_1) + P(A \cap B)$  ou encore :  $P(A_1) = P(A) - P(A \cap B)$  (2).

De (1) et (2), on déduit :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

4. Si  $A \subseteq B$ , soit  $B_1$  l'événement qui a lieu lorsque B a lieu mais quand A n'est pas réalisé.

Alors  $B = A \cup B_1$ , avec  $A \cap B_1 = \emptyset$ , d'où :  $P(B) = P(A) + P(B_1)$  et donc  $P(A) \leq P(B)$ .

**Propriété :** On considère une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables.

Alors la probabilité d'un événement A est :  $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$ .

**Preuve :** La probabilité de A est la probabilité des événements élémentaires qui le constituent, qui ont tous la même probabilité.

**Exemple :**

Avec le dé à 6 faces non truqué et l'événement A de l'exemple précédent :

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**Attention !!!** Cette formule devient fausse dès que l'on n'a pas équiprobabilité

**Contre-exemple :**

Avec le dé à 6 faces truqué et l'événement A de l'exemple précédent, on aurait avec cette formule :  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , ce qui ne correspond à la probabilité trouvée ci-dessus.

## 4. Variables aléatoires

**Définition :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

Une variable aléatoire X sur  $\Omega$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle qu'à toute issue  $\omega$  de  $\Omega$  on associe un réel  $x$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que  $X(\omega) = x$  soit un événement de  $\Omega$ , que l'on note  $X = x$ .

**Remarque :** Cette condition imposée à la variable aléatoire est toujours vérifiée lorsque l'univers est fini. On peut retenir qu'une variable aléatoire X sur  $\Omega$  est une fonction qui associe à chaque issue de  $\Omega$  un réel.

**Exemple :** Dans le lancé de deux dés, on peut définir la variable aléatoire S qui à chaque issue associe la somme des deux dés.

Dans le lancé d'une pièce non truquée, dont les issues sont pile/face on peut définir une variable aléatoire X prenant la valeur 0 lorsque l'issue est pile et 1 quand l'issue est face.

**Définition :** Soit  $\Omega$  un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité P.

On note  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les valeurs prises par une variable aléatoire X sur  $\Omega$ .

On définit une loi de probabilité pour la variable X, en définissant pour chaque  $x_i$  la probabilité de l'événement  $X = x_i$  comme la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image  $x_i$  par X.

Exemple : Sur une pièce non truquée et équilibrée, sans tranche, qu'on lance deux fois

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Définition : Soit  $\Omega$  un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité  $P$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ , admettant pour valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , de loi de probabilité définie par  $P(X=x_i)=p_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

L'espérance de  $X$  est le réel  $E(X)$  défini par :  $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ .

La variance de  $X$  est le réel  $V(X)$  défini par :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ .

L'écart-type de  $X$  est le réel  $\sigma(X)$  défini par :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

Propriété : On a :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$ .

Preuve :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \times 1 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$$