Fiche de Révision : Suites et limites.

1 Convergence d'une suite

1.1 Généralités

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et a pour limite l si pour tout intervalle ouvert contenant l, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle.
Autrement dit, une suite est convergente de limite l, lorsque les termes de la suite approchent d'aussi près que l'on veut le réel l pour n suffisamment grand.

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et a pour limite l ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n \in]l-\epsilon\,;\,l+\epsilon[$.

Remarques : (i) Dans le cas d'une suite convergente, il y a donc un nombre fini de termes en dehors de l'intervalle $]l-\epsilon\,;\,l+\epsilon[$.
(ii) Cela revient à écrire que :
« pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. »
Autrement dit que : « l'inégalité $|u_n - l| < \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »
(ii) Cela revient aussi à dire que :
« la double inégalité : $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »

Propriété : Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente de limite l, alors l est unique.

Notation : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente de limite l. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;B[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n > A$.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si et seulement si pour tout $B < 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n < B$.

1.2 Opérations sur les limites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.3 Comparaison de suites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $|u_n - l| \leqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives l et l', alors $l \leqslant l'$.

Théorème (dit des gendarmes) : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_2}$ trois suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de limites l, alors (v_n) est convergente et admet pour limite l.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$.
(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.4 Cas des suites arithmétiques et géométriques (rappels)

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison a.
Si $a>0$, alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
Si $a<0$, alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q, de premier terme $u_0>0$.
(i) Si $q>1$, alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
(ii) Si $q=1$, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0$.
(iii) Si $-1<q<1$, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
(iv) Si $q\leqslant -1$, alors la suite (u_n) diverge.

1.5 Cas des suites du type...

1.5.1 $u_n=f(n)$ (rappels)

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que : $u_n=f(n)$, où f est définie sur $[n_0\,;+\infty[$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$, où c est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, alors :
– si c est un réel, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=c$.
– si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=c$.

1.5.2 $u_n=f(v_n)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur I. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que tout les éléments à partir d'un certain rang $n_1$sont dans I. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite telle que : $u_n=f(v_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=a$, où a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$
– si c est un réel, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=c$.
– si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=c$.

1.6 Cas des suites monotones

1.6.1 Vocabulaire

Définition : Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Soit m et M deux réels.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :
– majorée par M si pour tout $n\geqslant n_0$, on a : $u_n\leqslant M$
– minorée par m si pour tout $n\geqslant n_0$, on a : $u_n\geqslant m$
– bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

1.6.2 Etude de la convergence

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante et majorée converge.
(ii) Toute suite décroissante et minorée converge.

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
(ii) Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarque : Il existe des suites non croissantes qui ont pour limite $+\infty$ (par exemple $u_n=n(2+\cos n)$). Le théorème précédent donne une condition suffisante pour qu'une suite admette comme limite $+\infty$, qui n'est pas une condition nécessaire. Idem pour le premier théorème du paragraphe (prendre par exemple $u_n=\dfrac{1}{n}(2+\cos n)$ qui converge vers 0 mais qui n'est pas monotone)

2 Suites adjacentes

Définition : Deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la suite formée par leur différence tend vers 0.

Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Remarque : On retiendra que lorsque deux suites sont adjacentes, celle qui croît est toujours inférieure ou égale à tous termes de celle qui décroît.
