R.O.C. de Septembre 2007 à Avril 2011

Limites

Question de cours : Nouvelle Calédonie Novembre 2007

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\ ;\ +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
«On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ...»
2. Démontrer le théorème «des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\ ;\ +\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Dérivation

R.O.C. : Métropole et Réunion Septembre 2007

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

– P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
– Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

Exponentielle

R.O.C. : Liban Juin 2010

- $\mathrm{e}^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(\mathrm{e}^x\right)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

R.O.C. : Nouvelle Calédonie Novembre 2008

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} g'(x) & = & g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

R.O.C. : Asie Juin 2008

On suppose connu le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

R.O.C. : Centres étrangers Juin 2008

Prérequis : on rappelle que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Equations différentielles

R.O.C. : Nouvelle Calédonie Mars 2011

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Logarithme népérien

R.O.C. : Antilles Guyane Septembre 2010

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation. On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$. À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Exercice de cours : Amérique du Sud Novembre 2008

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

   (a) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

Suites

R.O.C. : Métropole Juin 2010

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Question de cours : Liban Juin 2008

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Intégration

R.O.C. : Pondichéry Avril 2010

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\ ;\ b],\ f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a\ ;\ b],\ f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$

R.O.C. : Nouvelle Calédonie Novembre 2010

On suppose connus les résultats suivants : Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a\ ;\ b]\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x)+v(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\ \mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b],\ f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

R.O.C. : Amérique du Nord Juin 2009

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\ \mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x.$

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b],\ f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$

R.O.C. : Polynésie Juin 2008

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$
- Pour tous réels α et β $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\ \mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x.$

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$

Question de cours : Antilles Guyane Septembre 2007

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Probabilités

R.O.C. : Centres étrangers Juin 2009

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire
a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

R.O.C. : Métropole Juin 2009

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

R.O.C. : Métropole Juin 2008

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$. La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
   (a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   (b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Complexes

R.O.C. : Antilles-Guyane Juin 2010

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

1. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
   Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
2. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

R.O.C. : La Réunion Juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

R.O.C. : Polynésie Juin 2010

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + b\mathrm{i}$ où a et b sont deux nombre réels. On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

R.O.C. : Polynésie Juin 2009

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connus les résultats suivants :
- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec A $\neq$ C et A $\neq$ B :
$\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif;
- Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :
$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

R.O.C. : Pondichéry Avril 2008

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Géométrie dans l'espace

R.O.C. : Amérique du Sud Novembre 2009

Soit D le point de coordonnées $(x_{\mathrm{D}},\ y_{\mathrm{D}},\ z_{\mathrm{D}})$ et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P) = \frac{|ax_{\mathrm{D}} + by_{\mathrm{D}} + cz_{\mathrm{D}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
