Fiche de Révision Probabilités.

1 Généralités

Les probabilités s'occupent de phénomènes aléatoires, c'est à dire qui sont liés au hasard.

1.1 Vocabulaire

Définition : On appelle expérience aléatoire , une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire. Les résultats possibles d'une épreuve de l'expérience aléatoire sont appelés les issues.
Mathématiquement, pour modéliser une expérience aléatoire, on représente la globalité des issues par un ensemble appelé univers et noté Ω ; chacun des éléments de cet ensemble représentant une issue possible, ces issues étant toutes possibles et incompatibles entre elles deux à deux.
Le choix d'un tel ensemble n'est pas unique.

Définition : On appelle événement la réalisation d'une propriété lors d'une expérience aléatoire. Pour un univers déterminé, on appelle aussi événement l'ensemble des issues qui réalisent cette propriété. Lors d'une épreuve, en fonction de l'issue la propriété sera réalisée ou non.

Définition : On appelle événement tout sous ensemble A de l'univers.

Définition : On dit qu'un événement A est élémentaire, si une seule issue le réalise.

Définition : Ω est l'événement certain et $\emptyset$ l'événement impossible.
L'événement contraire $\overline{A}$ est l'événement qui a lieu quand l'événement A n'a pas lieu.
L'événement $A \cup B$ est l'événement qui a lieu quand l'événement A ou (non exclusif) l'événement B a lieu.
L'événement $A \cap B$est l'événement qui a lieu quand l'événement A et l'événement B ont lieu simultanément.
Si $A \cap B = \emptyset$, alors les événements A et B sont dits incompatibles : cela veut dire qu'ils ne peuvent pas avoir lieu simultanément.

1.2 Probabilité

Définition : Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité, une application P qui associe à chaque événement A de Ω un nombre réel $P(A)$ de [0 ;1], et qui soit telle que :
$P(\Omega) = 1$
Pour tout événement A tel que : $A \subset \Omega$, $P(A) \geqslant 0$.
Si A_1, A_2, ..., A_n sont n événements deux à deux incompatibles, alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$.

Propriété : Soit Ω un univers fini, sur lequel on définit une probabilité P.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires ω_i qui le constituent.

Propriétés : On a alors :
- (i) $P(\emptyset) = 0$
- (ii) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (iv) Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

Propriété : On considère une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables.

Alors la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'élèments de } A}{\text{nombre d'élèments de } \Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Attention ! ! ! Cette formule devient fausse dès que l'on n'a pas équiprobabilité.
Contre-exemple : Avec le dé à 6 faces truqué et l'événement A de l'exemple précédent, on aurait avec cette formule : $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, ce qui ne correspond à la probabilité trouvée ci-dessus !

1.3 Variables aléatoires

Définition : Soit Ω un univers fini.
Une variable aléatoire X sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle qu'à toute issue ω de Ω, on associe un réel x telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = x$ soit un événement de Ω, que l'on note $X = x$.

Remarque : Cette condition imposée à la variable aléatoire est toujours vérifiée lorsque l'univers est fini. On peut retenir qu'une variable aléatoire X sur Ω est une fonction qui associe à chaque issue de Ω un réel.

Définition : Soit Ω un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité P. On note $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs prises par une variable aléatoire X sur Ω.
On définit une loi de probabilité pour la variable X, en définissant pour chaque x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$ comme la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Définition : Soit Ω un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité P. On note $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs prises par une variable aléatoire X sur Ω, de loi de probabilité définie par $P(X = x_i) = p_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
L'espérance de X est le réel $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$.
La variance de X est le réel $V(X)$ défini par : $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$.
L'écart-type de X est le réel $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété (formule de Koenig-Huygens) : On a : $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$.

2 Conditionnement et indépendance

2.1 Conditionnement

2.1.1 Probabilité conditionnelle

Généralisation de l'approche statistique : On considère une expérience aléatoire et un événement B relatif à cette expérience, de probabilité non nulle. On considère également un deuxième événement A.

On considère une urne de Bernoulli relative à cette épreuve contenant N boules dont b sont marquées B et a marquées A. On sait de plus que s boules sont marquées à la fois A et B.

On a : $P(B) = \dfrac{b}{N}$, $P(A) = \dfrac{a}{N}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{r}{N}$.

Si maintenant on sait que l'événement B est réalisé, c'est à dire qu'il ne reste plus que dans l'urne que des boules marquées B, on a, en notant $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B : $P_B(A) = \dfrac{r}{b}$.

Comme : $\dfrac{r}{b} = \dfrac{\frac{r}{N}}{\frac{b}{N}}$, on obtient : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

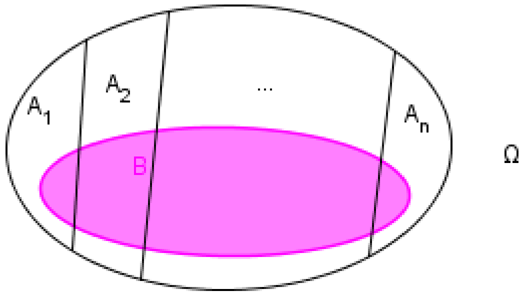
Théorème Définition : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$. Soit A un événement de Ω.
L'application P_B qui à $A \in \Omega$ fait correspondre le nombre $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω.
Le nombre $P_B(A)$ est appelé probabilité de A sachant B. Ce nombre est parfois abusivement noté $P(A|B)$.

Propriété :

- $P_B(B) = 1$
- $P_B(\emptyset) = 0$
- $P_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$

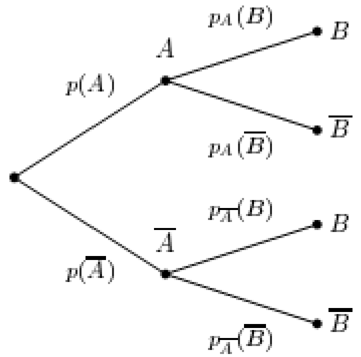
2.1.2 Formule des probabilités totales

Théorème (Formule des probabilités totales) : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements de Ω de probabilités non nulles réalisant une partition de Ω.
Soit B un événement de Ω .
Alors : $p(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} p\left(B \cap A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{A_i}(B) p(A_i)$.
En particulier, si A est un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$, alors : $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.



2.1.3 Représentation à l'aide d'un arbre prépondéré

La construction d'un arbre pondéré aide à visualiser les choses et est une preuve pour les calculs de probabilités au bac.



Dans un arbre pondéré, chaque branche relie deux noeuds. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.

La somme des probabilités des branches partant d'un noeud fait toujours 1.

Un chemin correspond à une suite de branches. Pour calculer la probabilité d'un chemin on multiplie les probabilités des branches qui le composent entre elles.

Pour connaître la probabilité de B on utilise la formule des probabilités totales.

2.2 Indépendance

2.2.1 Indépendance de deux événements

Définition : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit A et B deux événements de Ω.
On dit que A et B sont deux événements indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles.
A et B sont deux événements indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

Remarque : Cela revient à dire que la connaissance de l'événement A n'influe pas sur la probabilité de l'événement B et inversement.

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω fini, muni d'une probabilité P, alors :
A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
$\overline{A}$ et B sont indépendants ;
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque : Deux événements incompatibles, de probabilités non nulles, sont toujours dépendants.

En effet, soit A et B deux tels événements. On a : $p(A \cap B) = 0$ et $p(A) \times p(B) \neq 0$. D'où le résultat.

2.2.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition : Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω.
Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les valeurs prises respectivement par X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant p$ les événements $X = x_i$ et $Y = y_j$ sont indépendants.

Remarque : Lorsque deux variables X et Y sont indépendantes, la connaissance des lois de X et Y permet d'en déduire la loi du couple $(X ; Y)$. Ainsi si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont les valeurs prises respectivement par X et Y , on a : $p((X ; Y) = (x_i ; y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

2.2.3 Modélisation d'expériences indépendantes

Définition : Une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est constituée de n expériences partielles successives $(\mathcal{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dont les résultats ne dépendent pas des issues des expériences les ayant précédées. On dit alors que ces expériences partielles sont indépendantes.
On note Ω_i l'univers correspondant à l'expérience $\mathcal{E}_i$ et P_i une probabilité définie sur cet univers et modélisant l'expérience, i variant de 1 à n.
Un résultat de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un n-uplet de résultats $(a_1, a_2, ..., a_n)$ obtenus aux expériences $(\mathcal{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
On décide que :
Dire que les n épreuves $\mathcal{E}_i$ sont indépendantes, revient à pouvoir modéliser l'expérience $\mathcal{E}$ par une loi de probabilité P telle que : $P((a_1, a_2, ..., a_n)) = \prod_{i=1}^{n} P_i(a_i)$.

Définition : Lorsque toutes les expériences partielles sont identiques on parle alors d'épreuves successives.