FICHE DE RÉVISION : LOIS DE PROBABILITÉ.

1 Lois de probabilité discrètes

1.1 Loi de Bernouilli

Définition : On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues A (succès) et $\overline{A}$ (échec). Une telle expérience est appelée épreuve de Bernouilli. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il y a un succès et 0 sinon. Soit p la probabilité associée à l'événement $X = 1$. On dit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p. On note $X \hookrightarrow B(p)$.

Propriété : On considère une épreuve de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire suit une loi de Bernouilli de paramètre p : $B(p)$.
Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

1.2 Loi binomiale

Définition : On considère une épreuve de Bernouilli. On répéte n fois $(n \geqslant 1)$ de manière indépendante cette expérience. On dit alors que l'on constitue une expérience de Bernouilli (ou encore un schéma de Bernouilli.
On note p la probabilité d'un succès dans l'épreuve de Bernouilli.
On définit une variable aléatoire Y correspondant au nombre de succès. Alors on dit que Y suit une loi binomiale de paramètre n et p. On écrit : $Y \rightsquigarrow B(n,\, p)$

Remarque : Une telle expérience peut facilement être modélisée par un arbre

Propriété : On considère une expérience de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et p : $B(n,\, p)$.
Alors la probabilité d'obtenir k succès au bout des n épreuves est :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriété : On considère une expérience de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et p : $B(n,\, p)$.
Alors : $E(Y) = np$ et $V(Y) = np(1-p)$

2 Lois de probabilité continues

2.1 Loi de probabilité. Densité.

Propriété-Définition : Soit I un intervalle. Soit f une fonction continue et positive sur I, telle que $\int\limits_I f(t)\mathrm{d}t = 1$.

L'application P qui à tout sous-intervalle $[a\,;\,b]$ associe le nombre $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ définit une loi de probabilité sur I.
On dit que f est la densité de la loi de probabilité P.

Remarques : (i) Si $I = [m\,;\,M]$, alors $\int\limits_I f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_m^M f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si $I = [m\,;\,+\infty[$, alors $\int\limits_I f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_m^x f(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Même principe si $I =]-\infty\,;\,M]$.

2.2 Variable aléatoire continue. Quelques lois.

Propriété : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I. Soit P une loi de probabilité sur I, de densité f.
Alors on dit que X suit la loi de probabilité P, si pour tout a et b de I tel que $a \leqslant b$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Quelques lois usuelles :
(i) Loi uniforme sur $[0\,;\,1]$: elle a pour densité la fonction $f(x) = 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(ii) Loi exponentielle sur $[0\,;\,+\infty[$: elle a pour densité la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $0 \leqslant x$ avec $\lambda > 0$.

Définition : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P, de densité f
On appelle fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leqslant x)$, pour tout $x \in I$

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors : $P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
$P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
$P(x \leqslant X \leqslant y) = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}$.

2.3 Variables sans mémoire

Définition : On considère une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un objet ou d'un individu.
On dit que cette variable aléatoire est sans mémoire (ou sans vieillissement) si la durée de vie de l'objet ou de l'individu à l'instant $t + h$ est indépendante de la durée de vie à l'instant t.
Autrement dit pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $h \geqslant 0$, on a : $P(X \geqslant t + h / X \geqslant t) = P(X \geqslant h)$

Propriété : Une variable aléatoire est sans mémoire ssi elle suit une loi de probabilité exponentielle.

Définition. Propriété : On considère une variable aléatoire X sans mémoire. On appelle demi-vie la durée τ telle que $P(X < \tau) = 0,5$.
$\tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.