FICHE DE RÉVISION :
FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN.

1 Vers une nouvelle fonction

1.1 Bijection. Fonction réciproque

Définition : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
- pour tout réel x de I, son image par f, $f(x)$ est dans J ;
- pour tout réel y de J, il existe un unique x dans I antécédent de y par f.

Définition : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit une bijection f de I sur J.
On appelle fonction réciproque de f, la fonction notée g qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f (autrement dit $f(x) = y$)). Autrement dit $g(y) = x$.

Remarque : Avec les mêmes notations, on a : $g(y) = x$ ssi $f(x) = y$

Théorème de la bijection (rappel) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I
Si f est continue et strictement monotone, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (où $f(I)$ est l'image de l'intervalle I par f).

Remarque : Si f est continue et strictement monotone, alors f admet une fonction réciproque de $f(I)$ sur I.

Propriété : Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit g la fonction réciproque de f et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.2 Une nouvelle fonction

Définition : La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0\,;+\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x.

Conséquences :
- (i) Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$
- (ii) Pour tout $x > 0$: $\ln e^x = x$
- (iii) $\ln 1 = 0$
- (iv) $\ln e = 1$

Théorème : Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
$y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$

Théorème : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\ln ab = \ln a + \ln b$

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels $a_i > 0$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ on a : $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$

Propriété : Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété : Pour tout réel $a > 0$, on a : $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

2 Etude de la fonction logarithme népérien

Théorème : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquence : Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :
- $\ln a = \ln b$ ssi $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ ssi $a < b$;
- $\ln a > 0$ ssi $a > 1$;
- $\ln a < 0$ ssi $0 < a < 1$.

Propriété : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

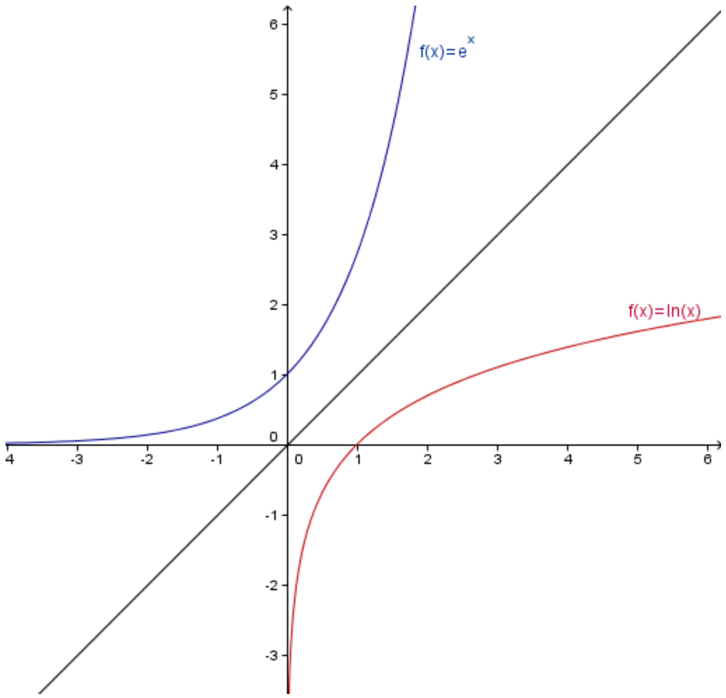
Propriété :La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Propriété :La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Théorème : La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Propriété :Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives.
Alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété :

- (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- (ii) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- (iii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$:
Pour h voisin de 0, on a : $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

3 La fonction logarithme décimal

Définition : La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x de $]0\,;+\infty[$, associe le réel $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque :$\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$

Théorème : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\log ab = \log a + \log b$

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

Propriété : Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\log(a^n) = n \log a$

Preuve :$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \log a \square$

Conséquence : Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\log(10^n) = n$