Fiche de Révision Fonctions puissances.

1 Fonctions puissances

1.1 Puissances réelles

Définition : Soit $a > 0$. Soit α un réel. On appelle puissance α de a le réel noté a^α tel que : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

Remarque : $a^\alpha > 0$.
Remarque : L'écriture a^α n'a de sens pour $a < 0$ que pour $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Propriété : Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a : $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$.

Propriété : Soit $a > 0$ et $b > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- $a^0 = 1$
- $1^\alpha = 1$
- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
- $\dfrac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$
- $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

Remarque : Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $a > 0$, on a : $a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln a} = e^{\ln\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

1.2 Etude des fonctions puissances (Hors programme)

Définition : Soit α un réel. On appelle fonction puissance, la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$par $f_\alpha(x) = x^\alpha$

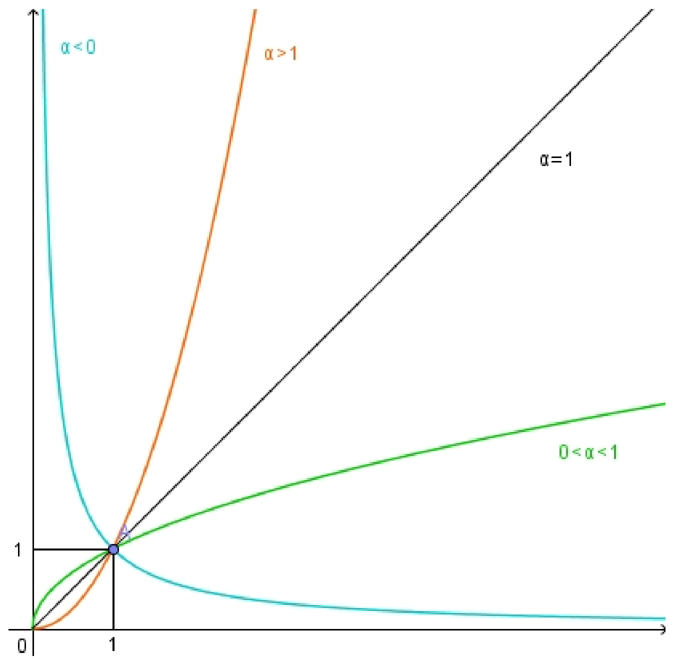
Remarque : Les fonctions puissances s'étudient sans problème puisque : $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Propriété : Soit α un réel. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Variations de f_α : Soit α un réel.
Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $\alpha < 0$, la fonction f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété : Soit α et β deux réels.
Si $x > 1$, alors x^α et x^β sont rangés dans le même ordre que α et β.
Si $0 < x < 1$, alors x^α et x^β sont rangés dans l'ordre inverse de α et β.

Représentation graphique :



2 Fonctions racines n-ièmes

Propriété Définition : Soit $a \geqslant 0$ et un entier $n \geqslant 2$. Il existe un unique nombre strictement positif qui élevé à la puissance n donne a. Ce nombre est appelé racine n-ième de a et est noté $\sqrt[n]{a}$.

Remarques : 1. Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée.
2. On a d'après le paragraphe 1, pour $x > 0$: $x^n = a \Leftrightarrow e^{n \ln x} = a \Leftrightarrow n \ln x = \ln a \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{n}\ln a \Leftrightarrow \ln x = \ln a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$, d'où la propriété suivante :

Propriété Soit $a > 0$ et n un entier tel que $n \geqslant 2$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque : L'écriture $\sqrt[n]{a}$ est définie pour $a = 0$ alors que l'écriture $a^{\frac{1}{n}}$ n'a pas de sens pour a nul.

Définition : Soit un entier $n \geqslant 2$. On appelle fonction racine n-ième la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Pour l'étude on se réfère à ce qui a donc été fait sur les fonctions puissances. A noter que :

Propriété
La fonction racine n-ième est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

La fonction racine n-ième est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.
La fonction racine n-ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : $\dfrac{\sqrt[n]{x}-0}{x-0} = x^{\frac{1}{n}-1} = e^{-\frac{n-1}{n}\ln x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x}-0}{x-0} = +\infty$, donc la fonction racine n-ième n'est pas dérivable en 0.

3 Etude des fonctions exponentielles

Définition : Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Remarques : (i) Si $a = 1$, $\exp_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose donc $a \neq 1$ pour la suite.
(ii) Soit $a > 0$ et $a \neq 1$, on appelle fonction logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

On a : $(\exp_a \circ \log_a)(x) = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} == e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = e^{\ln x} = x$ et $(\log_a \circ \exp_a)(x) = \dfrac{\ln a^x}{\ln a} = \dfrac{\ln e^{x\ln a}}{\ln a} = \dfrac{x \ln a}{\ln a} = x$
Les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont réciproques l'une de l'autre.
Leurs courbes représentatives sont donc symétriques l'une de l'autre.

Propriété : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp_a'(x) = (\ln a)\, a^x$

Propriété :

Si $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Si $a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0$.

Si $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty$.

Propriété :

Si $a > 1$,

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\exp_a'(x)$	$+$
Variations de $\exp_a$	$0 \nearrow +\infty$

Si $a < 1$,

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\exp_a'(x)$	$-$
Variations de $\exp_a$	$+\infty \searrow 0$

4 Croissances comparées

On se limite à la fonction ln, la fonction exp et aux fonctions puissances entières.

Théorème : Soit $n \geqslant 1$ un entier.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

Remarque : Autrement dit, au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle croît indéfiniment plus vite que (autrement dit l'emporte sur) la puissance n-ième d'un nombre et la puissance n-ième d'un nombre l'emporte sur le logarithme népérien.

Conséquences :
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$.
(ii) Soit $n \geqslant 1$ un entier. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$.
(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Théorème : Soit P un polynôme de degré n.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$