Fiche de Révision : Fonction exponentielle.
Equations differentielles.

1 Vers une nouvelle fonction

Théorème-Définition : Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle, elle est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$

Remarque : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
- $\exp(x) > 0$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Théorème : Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Propriété : Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Propriété : Pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Nouvelle notation : On note e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre s'appelle le nombre d'Euler. On retiendra que c'est un nombre irrationnel et que l'on a $e \approx 2,718$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.
Par extension à $\mathbb{R}$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$.

Ainsi on peut réécrire les propriétés de l'exponentielle avec cette nouvelle notation :

Résumé :

- $e^0 = 1$,
- $e^1 = e$,
- $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$,
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$,
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{na} = (e^a)^n$

2 Etude de la fonction exponentielle

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Corollaire : Soit a et b deux réels.
(i) $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$
(ii) $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

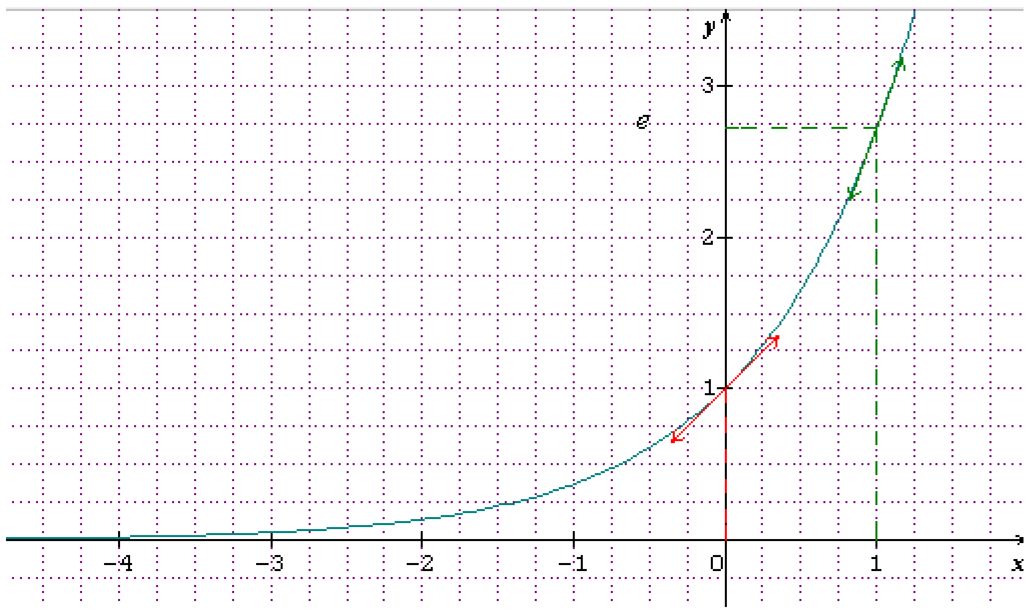
Conséquence : $e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Tableau de variation :

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de $x \mapsto e^x$:



Propriété :Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et $(\exp \circ u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriété :

– (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ – (ii) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ – (iii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto e^h$:
Pour h voisin de 0, on a : $e^h = 1 + h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

3 Equations différentielles

On a vu une première équation différentielle : $y' = y$.

On va maintenant s'intéresser à des équations différentielles du type : $y' = ay$ puis du type $y' = ay + b$.

3.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Théorème :
Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle $y' = ay$, où $a \in \mathbb{R}$, admet pour solution sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type $x \mapsto \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}$, admet pour solution sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type $x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
L'équation différentielle $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}$, admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$

3.3 Lien avec l'équation fonctionnelle

Théorème :
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est une fonction non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

(ii) Il existe un nombre réel k tel que pour tout réel x, on a : $f(x) = e^{kx}$.