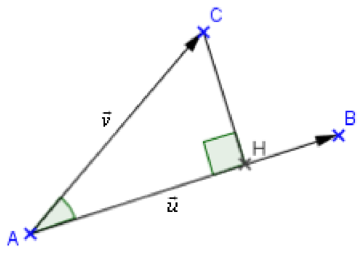
Fiche de Révision : Produit scalaire dans l'Espace.
Droites et plans de l'espace.

1 Rappels sur le produit scalaire dans le plan

1.1 Définition

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ (qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») le réel défini par :



$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$$

Si l'un des vecteurs est nul, on pose, par définition : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ (noté $\vec{u}^2$) : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$.
On appelle norme de $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On a : $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

1.2 Lien entre produit scalaire, norme et cosinus

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

1.3 Vecteurs orthogonaux

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si soit l'un d'entre eux est nul, soit leurs directions sont perpendiculaires.

1.4 Propriétés

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de D sur (AB).

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$

$\overrightarrow{HK}$ est appelé le vecteur projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

Propriété : Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et k un réel.
Alors :
- (i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- (ii) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- (iii) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

1.5 Expression analytique du produit scalaire

Propriété : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ deux vecteurs.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Conséquence : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ un vecteur.
Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.6 Projeté orthogonal sur un axe

Propriété Définition : Soit $\left(0, \vec{\imath}\right)$ le repère normé d'un axe.
Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{u}$ sur cet axe est le vecteur $\left(\vec{u}.\vec{\imath}\right)\vec{\imath}$.

2 Produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
– Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$
Soit $(\mathcal{P})$ un plan contenant A, B et C (il en existe au moins un !)
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.
– Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors on pose $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.
On appelle carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ (noté $\overrightarrow{u}^2$) : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$.
On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ et on note $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2}$.

Propriété : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel. On a : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k|\|\overrightarrow{u}\|$

2.2 Lien entre produit scalaire, norme et cosinus

Propriété : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$
On a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

2.3 Propriétés

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'appliquent à des vecteurs coplanaires de l'espace
En particulier, deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant coplanaires, on a, avec k un réel :
– (i) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
– (ii) $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
– $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$

Propriété :
Soit trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On a :

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

2.4 Orthogonalité dans l'espace

2.4.1 Orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites

Définition : On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Définition : On dit que deux droites sécantes de l'espace sont perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles en passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

Propriété : Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si soit l'un d'entre eux est nul, soit leurs directions sont orthogonales.

2.4.2 Perpendicularité d'un plan et d'une droite

Propriété : Soit une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un plan $(\mathcal{P})$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.
(ii) Pour tous points M et N de $(\mathcal{P})$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MN} = 0$.
(iii) Pour tout couple de vecteurs non colinéaires $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $(\mathcal{P})$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$

2.4.3 Vecteur normal à un plan, plans perpendiculaires

Définition : On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ qui est vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Propriété : Soit $(\mathcal{P})$ un plan, $A \in (\mathcal{P})$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
$M \in (P)$ ssi $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$

Définition : On dit que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

2.5 Expression analytique du produit scalaire

Propriété : On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,;y\,;z)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs.
Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

Conséquence : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ un vecteur.
Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2.6 Projections orthogonales dans l'espace

Définition : Soit $(\mathcal{P})$ un plan et M un point de l'espace.
On appelle projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$ le point M' intersection de la droite perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ et passant par M avec le plan $(\mathcal{P})$.

Définition : Soit $(\mathcal{D})$ une droite et M un point de l'espace.
On appelle projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ le point M' intersection du plan perpendiculaire à $(\mathcal{D})$, passant par M, avec la droite $(\mathcal{D})$.

2.7 Applications

2.7.1 Equation cartésienne d'un plan

Théorème : On munit l'espace d'un repère orthonormal.
- (i) Soit $(\mathcal{P})$ un plan et $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Alors le plan a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- (ii) Réciproquement, soit a, b, c (non tous les trois nuls) et d quatre réels, l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$.

2.7.2 Distance d'un point à un plan

Théorème : On munit l'espace d'un repère orthonormal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan d' équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Soit $A\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est égale à : $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2.7.3 Demi-espace

Définition : On munit l'espace d'un repère orthonormal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan d' équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Ce plan partage l'espace en deux demi-espaces ouverts (respectivement fermés) :
- l'un ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax+by+cz+d>0$ (respectivement $ax+by+cz+d\geqslant 0$)
- l'autre ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax+by+cz+d<0$ (respectivement $ax+by+cz+d\leqslant 0$).

3 Droites et plans dans l'espace

3.1 Caractérisations barycentriques

3.1.1 faisant intervenir deux points de l'espace

Théorème :
Soit A et B deux points de l'espace.
(i) Le barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$ est situé sur la droite (AB) et réciproquement les points de (AB) est l'ensemble des barycentres de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$.
(ii) Le barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$, avec α et β de même signe est situé sur le segment [AB] et réciproquement les points de [AB] est l'ensemble des barycentres de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$ et avec α et β de même signe.

Remarque : Ce théorème aurait pu aussi formulé comme suit :
Soit A et B deux points de l'espace.
L'ensemble des barycentres de $(A, 1-t)$ et (B,t) avec :
- $t\in\mathbb{R}$ est la droite (AB).
- $t\in[0\,;\,1]$ est le segment [AB].

3.1.2 faisant intervenir trois points non alignés de l'espace

Théorème : Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
(i) Le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ appartient au plan (ABC).
Réciproquement, le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
(ii) Le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ où $\alpha>0$, $\beta>0$ et $\gamma>0$ appartient à l'intérieur du triangle ABC.
Réciproquement, l'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ où $\alpha>0$, $\beta>0$ et $\gamma>0$.

3.2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Théorème-Définition : On munit l'espace d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ un vecteur non nul.
Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=x_A+\alpha t\\ y=y_A+\beta t\\ z=z_A+\gamma t\end{cases}$.

On dit que $\begin{cases} x=x_A+\alpha t\\ y=y_A+\beta t\\ z=z_A+\gamma t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Remarque : La représentation paramétrique d'un segment ou d'une demi-droite est analogue, simplement que l'on choisit $\overrightarrow{u}$ et t convenablement :

pour le segment $[AB]$, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $t \in [0\,;\,1]$.

pour la demi-droite $[AB)$, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $t \in [0\,;\,+\infty[$.

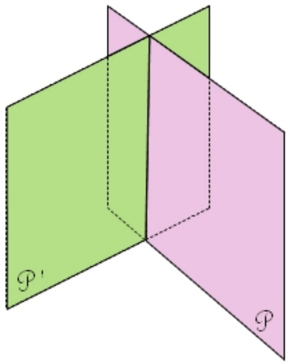
3.3 Intersections

3.3.1 Intersection de deux plans

Etude géométrique : Deux plans de l'espace peuvent être :

- soit parallèles (de manière stricte ou confondus),

- soit sécants suivant une droite.



Théorème : Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires

Remarque : La négation de ce théorème est :

Deux plans sont sécants ssi leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Etude algébrique :

Théorème : Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne respective $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

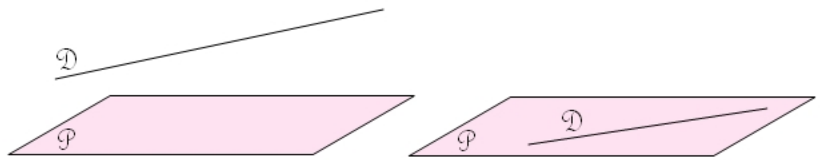
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ssi $(a\,;\,b;\,c)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c')$ sont proportionnels.
  Dans ce cas $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ssi $(a\,;\,b;\,c\,;\,d)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c'\,;\,d')$ sont proportionnels et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles ssi $(a\,;\,b;\,c\,;\,d)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c'\,;\,d')$ ne sont pas proportionnels.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants ssi $(a\,;\,b;\,c)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c')$ ne sont pas proportionnels. L'équation de la droite d'intersection est alors un système : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, appelé système d'équations cartésiennes de la droite.

Remarque : A partir d'un système d'équations cartésiennes d'une droite on peut bien entendu revenir à une représentation paramétrique de cette droite et réciproquement.

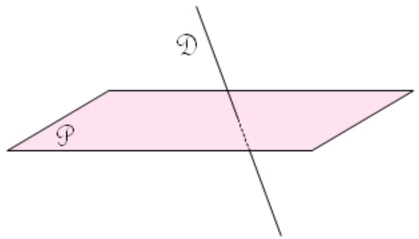
3.3.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Etude géométrique : Un plan et une droite de l'espace peuvent être :

- soit parallèles (de manière stricte ou confondus),



- soit sécants suivant un point.



Théorème : Un plan et une droite sont parallèles si et seulement si un vecteur normal du plan et un vecteur directeur de la droite sont orthogonaux.

Etude algébrique :

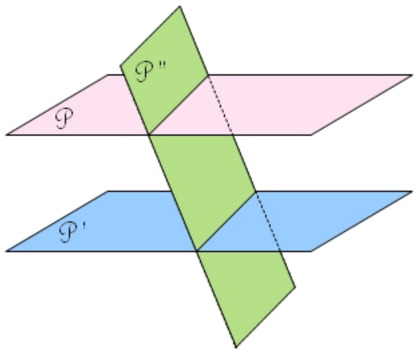
Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et une droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$.
Etudier l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ revient à résoudre le système :
$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ x = x_A+\alpha t \\ y = y_A+\beta t \\ z = z_A+\gamma t \end{array}\right. .$$
Ce système n'admet pas de solution ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles. (Faire une figure)
Ce système admet une infinité de solutions ssi $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$. (Faire une figure)
Ce système n'admet qu'une seule solution ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécantes en un point. (Faire une figure)

3.3.3 Intersection de trois plans

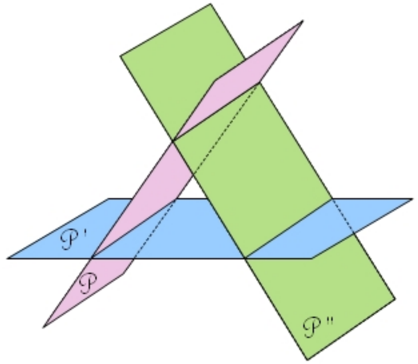
Etude géométrique : Trois plans distincts (sinon on est ramené à l'étude de deux plans) de l'espace peuvent :

- soit n'avoir aucun point commun :
  - les trois plans sont strictement parallèles

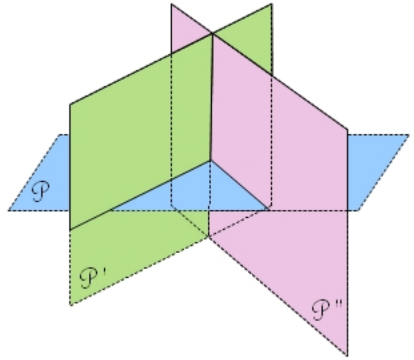
  - deux plans sont strictement parallèles, le troisième est sécant aux deux premiers



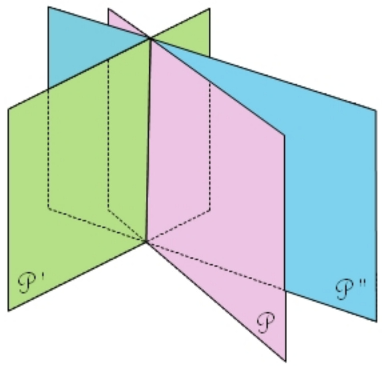
  - deux plans se coupent, le troisième est strictement parallèle à la droite d'intersection des deux premiers



- soit un seul point commun : deux plans se coupent suivant une droite d'intersection dont un vecteur directeur n'est pas coplanaire au troisième plan



- soit une droite commune : les trois plans se coupent suivant une droite commune.



Remarque : L'étude géométrique peut se faire via l'étude des vecteurs normaux.

Etude algébrique :

Soit trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ d'équation cartésienne respective $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ et $a''x+b''y+c''z+d''=0$.
Etudier l'intersection de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ revient à résoudre le système : $\left\{\begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right.$.
Lorsque ce système n'admet pas de solution, l'intersection de$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ est vide.
Lorsque ce système admet une solution, l'intersection de$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ est un point de coordonnées la solution trouvée.
Lorsque ce système se ramène à deux équations, l'intersection de$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ est une droite de système d'équations les deux équations auquel s'est ramené le système.
Lorsque ce système se ramène à une équation, l'intersection de$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ est un plan d'équation l'équation auquel s'est ramené le système.