Fiche de revision Complexes.

1 Introduction aux nombres complexes

1.1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition : i est le nombre tel que : $i^2 = -1$

Définition : Un nombre complexe est un nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux réels.
x : partie réelle de z, notée $Re(z)$.
y : partie imaginaire de z, notée $Im(z)$.
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

Définition : Deux nombres complexes sont égaux ssi leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.

Conséquence : L'écriture d'un nombre complexe $z = x + iy$ est unique.

Définition : Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définition : On appelle somme de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

Définition : On appelle produit de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Remarques : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et en possédent les propriétés.

Définition : On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z + (-z) = 0$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $-z = -x - iy$.

Définition : On appelle différence de deux nombres complexes z et z' le nombre noté $z - z'$ tel que $z - z' = z + (-z')$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nul. Alors $z - z' = x - x' + i(y - y')$.

Définition : On appelle inverse d'un nombre complexe non nul z le nombre noté $\frac{1}{z}$ et tel que $z \times \frac{1}{z} = 1$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Définition : Soit z et z' deux nombres complexes, avec z' non nul. Alors le quotient de z par z' noté $\frac{z}{z'}$ est le nombre tel que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de relation d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, en obéissant à la même règle des signes.

1.2 Plan complexe

Définition : On munit un plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On considère un nombre complexe $z = x + iy$.
On peut associer au nombre z le point M$(x; y)$. z est l'affixe de M et on note M(z).
On peut aussi associer au nombre z le vecteur $\vec{v}(x\,;\,y)$. z est l'affixe de $\vec{v}$ et l'on note $\vec{v}(z)$.
Le plan $\mathcal{P}$ est appelé plan complexe.

Vocabulaire : L'axe $(O\,;\,\vec{e_1})$ est l'ensemble des points M d'affixe réelle, on l'appelle donc l'axe des réels.

L'axe $(O\,;\,\vec{e_2})$ est l'ensemble des points M d'affixe imaginaire pur, on l'appelle donc l'axe des imaginaires.

Propriété : (i) Soit $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$, alors $\vec{u}+\vec{v}(z+z')$.
(ii) Soit A(z) et B(z') alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z'-z)$ et I milieu de [AB] a pour affixe : $\dfrac{z+z'}{2}$
(iii) Soit $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)$ n points pondérés du plan, d'affixes respectives z_{A_1}, z_{A_2}, ..., z_{A_n}, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$. Alors en notant G leur barycentre, G a pour affixe : $z_G = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k z_{A_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}$.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle nombre conjugué d'un nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe noté $\bar{z}=x-iy$

Interprétation géométrique : Soit M(z) un point du plan complexe. On note M'$(\bar{z'})$. Alors M' est l'image de M par rapport à l'axe des réels. L'application M$(z)\mapsto$ M'$(\bar{z'})$ est la symétrie d'axe $(O,\vec{i})$.

Propriété : Soit z et z' deux complexes.
(i)$\bar{\bar{z}}=z$
(ii) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$
(iii) $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$
(iv) Pour $z\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$
(v) Pour $z'\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
(vi) $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ avec $n\in\mathbb{Z}$

Propriété : Soit z un complexe.
$Re(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Conséquence : Soit z un complexe.
$z\in\mathbb{R}$ ssi $z=\bar{z}$
$z\in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur) ssi $z=-\bar{z}$

2 Vers la forme trigonométrique

2.1 Module d'un nombre complexe

Définition : Module d'un nombre complexe $z=x+iy$: $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :(i) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
(ii) $|zz'|=|z||z'|$
(iii) $|\dfrac{z}{z'}|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
(iv) $Re(z)\leqslant|z|$
(v) $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

2.2 Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique

Définition : Argument d'un nombre complexe $z=x+iy$, noté $arg(z)$ l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)$, où M est le point du plan complexe d'affixe z.

Remarque : Il existe une infinité d'argument pour un nombre complexe donné. On parle d'argument principal pour l'argument ayant pour valeur comprise dans $]-\pi;\pi]$.

Propriété : Soit $z=x+iy$ un nombre complexe non nul.
Un argument θ défini à 2π de z est donné par :
$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Ainsi : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Notation : Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et dont un argument est θ, la forme trigonométrique de z est son écriture : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Propriété : Soit $z=r(cos\theta+i\sin\theta)$ un nombre complexe avec $r>0$. Alors $|z|=r$ et $arg(z)=\theta[2\pi]$

Propriété : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$,
(ii) $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$,
(iii) $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$,
(iv) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$,
(v) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$
(vi) $\arg(z^n)=n\arg(z)[2\pi]$ où $n\in\mathbb{Z}$

Théorème : Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Alors : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(z_B-z_A)[2\pi]$.

Théorème : Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe. Alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.

Propriété : (Formule de Moivre
Pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

2.3 Notation d'Euler

Notation : Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété : Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
(iv) $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Propriété : Soit θ une nombre réel. On a :
$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3 Applications

3.1 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Définition : Soit a, b et c trois réels, a non nul. On appelle équation du second dégré à coefficients réels toute équation du type $az^2 + bz + c = 0$, où z est l'inconnue.

Définition : Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$, c'est trouver tous les nombres complexes qui rendent l'égalité vraie. Un tel nombre est appelé solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation.

Résolution :
$\Delta = b^2 - 4ac$, discriminant de $az^2 + bz + c = 0$.
D'où : $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2+bz+c = 0$ admet deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2+bz+c = 0$ admet une solution réelle double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
  On remarque que : $z_2 = \overline{z_1}$.

Ainsi dans $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c$ se factorise toujours.

3.2 Ensemble de points

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = r$, où $a \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$ est un cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = |z - b|$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ est la médiatrice de [AB]

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z - a) = \theta$, où $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la demi-droite d'origine A (A non inclus) dirigée par le vecteur $\vec{v}$, tel que $(\vec{e_1}, \vec{v}) = \theta[2\pi]$

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ et $z \neq a$ et $z \neq b$ est un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

3.3 Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$

3.3.1 Où $z' = z + b$, avec $b \in \mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z + b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

3.3.2 Où $z' - \omega = k(z - \omega)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, $\omega \in \mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' - \omega = k(z - \omega)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, $\omega \in \mathbb{C}$ est une homothétie de rapport k , de centre Ω, d'affixe ω.

3.3.3 Où $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ est une rotation de centre Ω, d'affixe ω et d'angle θ.