
CHAPITRE 13 : LOIS DE PROBABILITÉ.

1 Lois de probabilité discrètes

1.1 Loi de Bernoulli

Définition : On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues A (succès) et \bar{A} (échec). Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il y a un succès et 0 sinon. Soit p la probabilité associée à l'événement $X = 1$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p . On note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemples : 1. Lancé d'une pièce P, F.

2. Un patient est atteint d'une maladie ou non

Propriété : On considère une épreuve de Bernoulli, dans la quelle une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p : B(p)$.

Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Preuve : $E(X) = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 = p$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2 = (1 - p) \times 0^2 + p \times 1^2 - p^2 = p(1 - p).$$

1.2 Loi binomiale

Exemple introductif : Sur une avenue trois feux tricolores sont au rouge avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et fonctionnent indépendamment les uns des autres.

1. Modéliser cette situation par un arbre.

2. Calculer la probabilité pour un automobiliste de s'arrêter au rouge sur les trois feux tricolores.

Définition : On considère une épreuve de Bernoulli. On répète n fois ($n \geq 1$) de manière indépendante cette expérience. On dit alors que l'on constitue une expérience de Bernoulli (ou encore un schéma de Bernoulli).

On note p la probabilité d'un succès dans l'épreuve de Bernoulli.

On définit une variable aléatoire Y correspondant au nombre de succès. Alors on dit que Y suit une loi binomiale de paramètre n et p . On écrit : $Y \rightsquigarrow B(n, p)$

Exemple : Dans l'exemple précédent, le nombre d'arrêt aux feux suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{4} : \left(B \left(3; \frac{1}{4} \right) \right)$.

Remarque : Une telle expérience peut facilement être modélisée par un arbre

Propriété : On considère une expérience de Bernoulli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p : B(n, p)$.

Alors la probabilité d'obtenir k succès au bout des n épreuves est :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Preuve : Il y a $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir k succès parmi les n épreuves : autrement dit il y a dans l'arbre représentant une expérience de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ branches.

Pour chaque branche, il y a k succès qui ont une probabilité p de survenir et $n - k$ échecs qui ont une probabilité $1 - p$ de survenir. Comme ces épreuves sont indépendantes, la probabilité que cela survienne est $p^k (1 - p)^{n-k}$.

On obtient ainsi : $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Exemple : Avec l'exemple précédent, compter la probabilité d'avoir à s'arrêter à exactement deux feux rouges.

$$\text{On a : } P(Y = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{128}.$$

Propriété : On considère une expérience de Bernoulli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p : B(n, p)$.

Alors : $E(Y) = np$ et $V(Y) = np(1 - p)$

Preuve : A titre d'info, pour l'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=0}^n P(Y = k)k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k \times n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\
 &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
 &= np(p + 1 - p)^{n-1} \\
 &= np
 \end{aligned}$$

Admis pour la variance

2 Lois de probabilité continues

2.1 Loi de probabilité. Densité.

Introduction : On s'intéresse maintenant à une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un intervalle, par exemple c'est le cas de la désintégration radioactive ou encore j'attends une livraison entre 9h et 12h. Quelle est la probabilité que je rate ma livraison si je pars 10 minutes ?

Propriété-Définition : Soit I un intervalle. Soit f une fonction continue et positive sur I , telle que $\int_I f(t)dt = 1$.
 L'application P qui à tout sous-intervalle $[a; b]$ associe le nombre $\int_a^b f(t)dt$ définit une loi de probabilité sur I .
 On dit que f est la densité de la loi de probabilité P .

Remarques : (i) Si $I = [m; M]$, alors $\int_I f(t)dt = \int_m^M f(t)dt$.

(ii) Si $I = [m; +\infty[$, alors $\int_I f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_m^x f(t)dt$.

(iii) Même principe si $I =]-\infty; M]$.

Exemple : Chercher α tel que $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0; 1]$

On a : $\int_0^1 (x + \alpha)dx = \left[\frac{(x + \alpha)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{(1 + \alpha)^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1 + 2\alpha}{2}$, d'où : $\alpha = \frac{1}{2}$.

2.2 Variable aléatoire continue. Quelques lois.

Propriété : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I . Soit P une loi de probabilité sur I , de densité f .
 Alors on dit que X suit la loi de probabilité P , si pour tout a et b de I tel que $a \leq b$, on a : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$.

Quelques lois usuelles :

(i) Loi uniforme sur $[0; 1]$: C'est la loi qui a pour densité la fonction $f(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$.

(ii) Loi exponentielle sur $[0; +\infty[$: C'est la loi qui a pour densité la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $0 \leq x$ avec $\lambda > 0$.

Définition : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P , de densité f
 On appelle fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leq x)$, pour tout $x \in I$

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
 Alors : $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
 $P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
 $P(x \leq X \leq y) = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}$.

2.3 Variables sans mémoire

Définition : On considère une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un objet ou d'un individu. On dit que cette variable aléatoire est sans mémoire (ou sans vieillissement) si la durée de vie de l'objet ou de l'individu à l'instant $t + h$ est indépendante de la durée de vie à l'instant t .
Autrement dit pour tout $t \geq 0$ et pour tout $h \geq 0$, on a : $P(X \geq t + h / X \geq t) = P(X \geq h)$

Propriété : Une variable aléatoire est sans mémoire ssi elle suit une loi de probabilité exponentielle.

Preuve : Supposons que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Alors $P(X \geq t + h / X \geq t) = \frac{P((X \geq t + h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$, car : $(X \geq t + h) \cap (X \geq t)$ correspond à l'événement $(X \geq t + h)$ et $(X \geq t)$, soit à l'événement : $(X \geq t + h)$.

De plus : $P(X \geq t + h) = 1 - P(X \leq t + h) = 1 - \int_0^{t+h} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{t+h} = e^{-\lambda(t+h)}$.

$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ et $P(X \geq h) = e^{-\lambda h}$.

D'où : $P(X \geq t + h / X \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$.

Réciproque admise.

Définition. Propriété : On considère une variable aléatoire X sans mémoire. On appelle demi-vie la durée τ telle que $P(X < \tau) = 0,5$.
$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Exemple : Désintégration radioactive