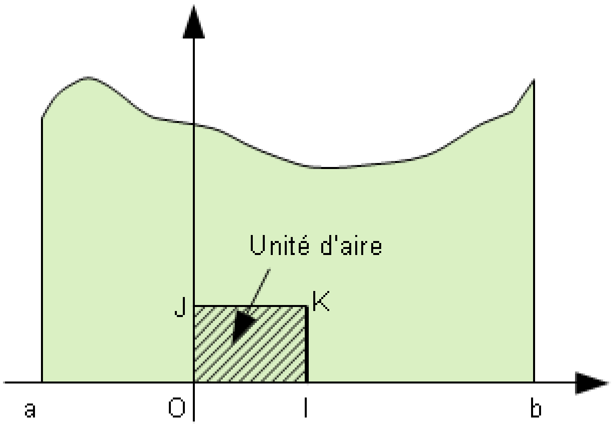
Chapitre 11 : Intégration.

1 Intégration

1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

1.1.1 Définition

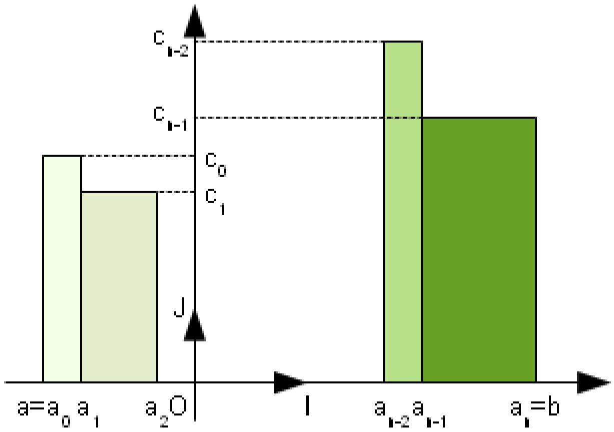
Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
On appelle unité d'aire, l'aire du rectangle direct OIKJ, où : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.
On appelle intégrale de f de a à b, que l'on note : $\int_a^b f(x)dx$ (ou encore $\int_a^b f(t)dt$), l'aire du domaine D défini par :
$\mathcal{D} = \{M(x\,;\,y)\ :\ a \leqslant x \leqslant b \,\text{et}\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ exprimé en unités d'aire.
On lit $\int_a^b f(x)dx$: « intégrale de a à b de f ».
Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.



Exemples :1. Si $f(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$ u.a.
2. Si $f(x) = x$, $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$, car l'aire sous la courbe de f est celle d'un triangle rectangle isocèle de côté 1.

1.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier à valeurs positives

Définition : On dit qu'une fonction est en escalier sur un intervalle $[a\,;\,b]$ si elle est constante par morceaux sur $[a\,;\,b]$, autrement dit il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ et des réels c_0, ..., c_{n-1} tels que pour $x \in]a_i\,;\,a_{i+1}[$, $f(x) = c_i$.
On dit que a_0, a_1, ..., a_n est une subdivision de $[a\,;\,b]$ adaptée à $[a\,;\,b]$.



Remarque : En les points d'abscisse a_i, $f(a_i)$ peut valoir n'importe quelle valeur.

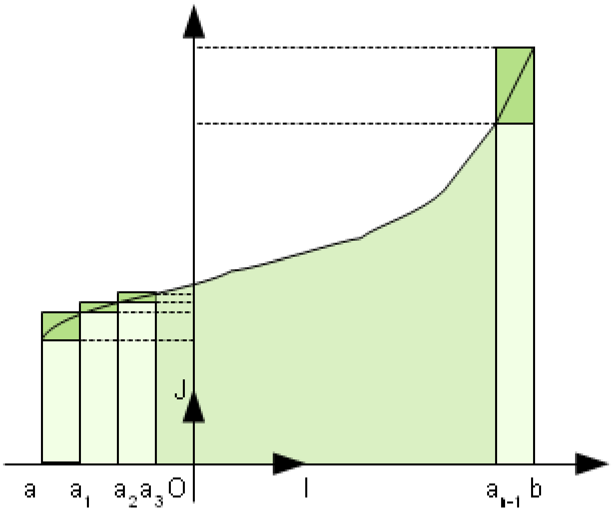
Propriété : On considère une fonction f en escalier à valeurs positives. Alors : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1}-a_i)$ u.a.

Exemple : $\int_0^n E(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1-i) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ u.a.

1.1.3 Calculer l'aire sous une courbe

Exemple de l'aire sous la parabole : On réussit à encadrer l'aire sous la parabole par deux suites adjacentes qui tendent vers l'aire sous la parabole.

Propriété (admise) : Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$.
Les suites de terme général : $u_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+(i+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$ sont adjacentes et leur limite commune est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.



avec $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$

Graphiquement, (u_n) représente l'aire obtenue par les rectangles en dessous de la courbe et (v_n) l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Lorsque le pas de la subdivision diminue, ces deux aires tendent vers la même valeur : celle de l'aire sous la courbe.

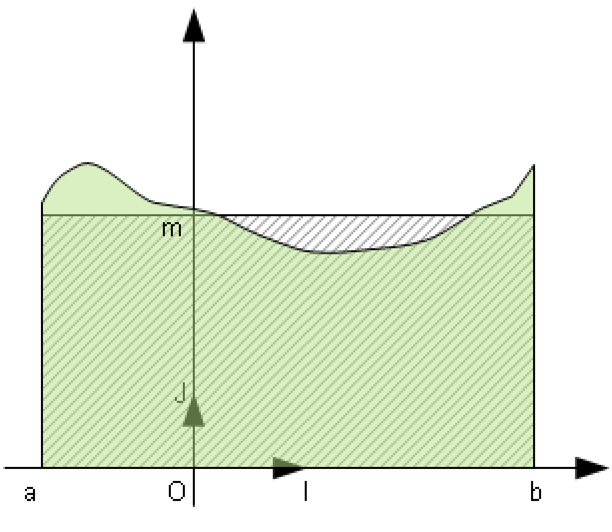
Remarque : Dans le cas d'une fonction continue, positive et décroissante, on peut construire deux suites adjacentes de la même manière, on intervertit simplement u_n et v_n.

On peut alors facilement généraliser cela à une fonction continue et positive.

1.1.4 Valeur moyenne d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

On cherche une fonction constante g telle que l'aire sous la courbe de g soit égal à l'aire sous la courbe de f.



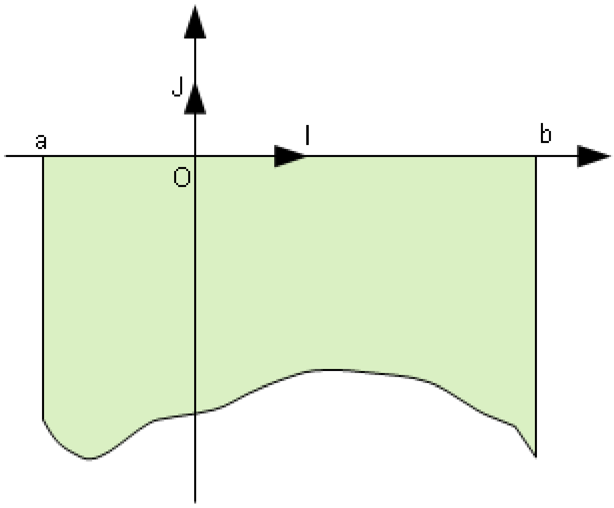
On cherche m tel que $g(x)=m$ pour $x \in [a\,;\,b]$ et : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ autrement dit on a : $\int_a^b f(x)dx = m(b-a)$, d'où : $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est le réel : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

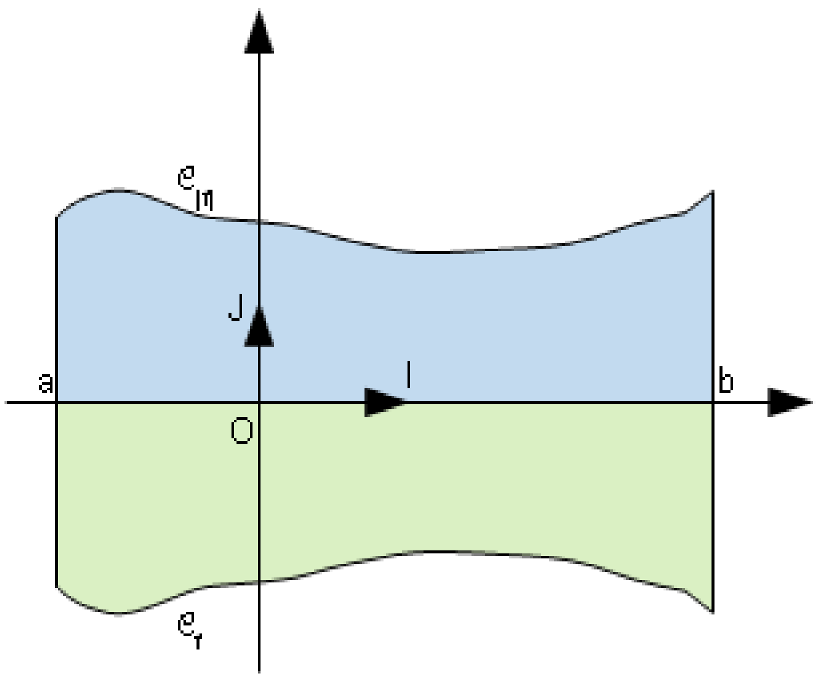
1.2 Extension de l'intégrale à une fonction continue de signe quelconque

1.2.1 Intégrale d'une fonction continue et négative

Définition : Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
On appelle intégrale de f de a à b, que l'on note : $\int_a^b f(x)dx$ (ou encore $\int_a^b f(t)dt$), l'opposé de l'aire du domaine D défini par :
$\mathcal{D} = \{M(x\,;\,y)\ :\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ exprimé en unités d'aire.



Propriété : Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
On a : $\int_a^b |f(x)|\,dx = -\int_a^b f(x)dx$.



Preuve : $\mathcal{C}_{|f|}$ est la courbe représentative de $|f|$ et est symétrique par rapport à l'axe des abscisses à $\mathcal{C}_f$.

Par symétrie les domaines bleu et vert ont même aire. L'aire sous $\mathcal{C}_{|f|}$ est puisque $|f|$ est positive, $\int_a^b |f(x)|\,dx$ et l'aire sous $\mathcal{C}_f$ est puisque f est négative, $-\int_a^b f(x)dx$, d'où l'égalité.$\square$

Propriété : Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est égale à : $-\dfrac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

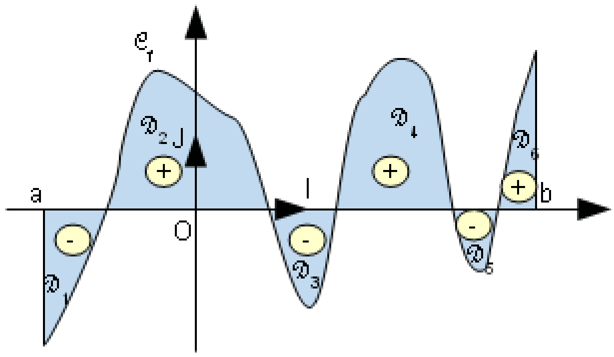
1.2.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Remarque : Soit f une fonction continue et de signe constant sur $[a\,;\,b]$. On dit que $\int_a^b -f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses et délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$: c'est une quantité positive lorsque la fonction est positive et négative lorsque la fonction est négative.

On va utiliser cette remarque pour étendre la définition de l'intégrale.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, de signe quelconque sur $[a\,;\,b]$. L'intégrale de f de a à b, notée $\int_a^b f(x)dx$ correspond à la somme des aires algébriques des domaines où $f(x)$ garde un signe constant.

Exemple :



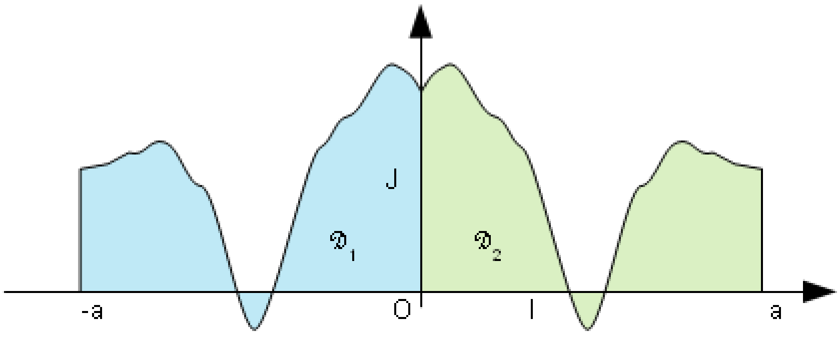
On a : $\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_3) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_4) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_5) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_6)$.

1.3 Propriétés algébriques

Convention : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On pose : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

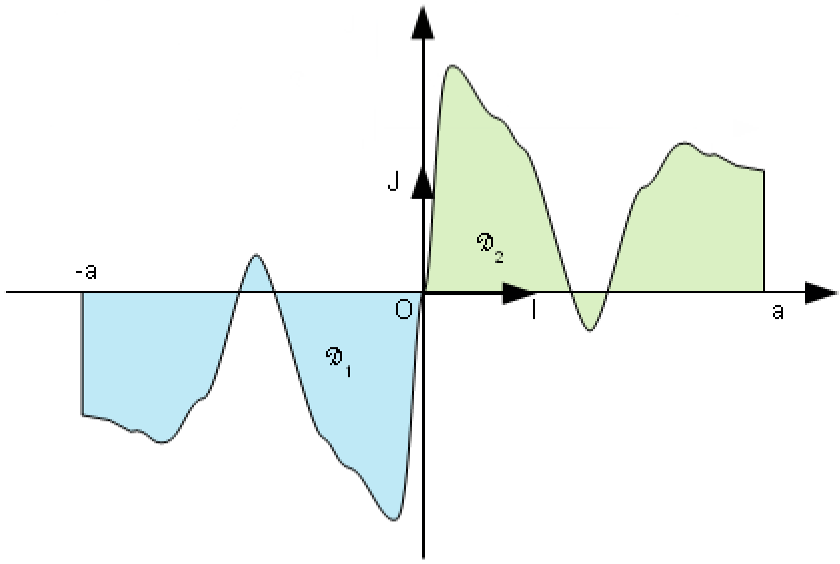
Théorème (admis) (relation de Chasles) : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c de I. On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Conséquences : (i) Soit f une fonction paire sur $[-a\,;\,a]$. Alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
(ii) Soit f une fonction impaire sur $[-a\,;\,a]$. Alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
Preuve : (i)



$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$, or puisque f est paire les domaines $\mathcal{D}_1$ compris entre l'axe des abscisses et la courbe, entre les droites d'équations $x = -a$ et $x = 0$ et $\mathcal{D}_2$ compris entre l'axe des abscisses et la courbe, entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ sont symétriques et de même aire, d'où : $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$. D'où le résultat.

(ii)



Raisonnement similaire, avec : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$.

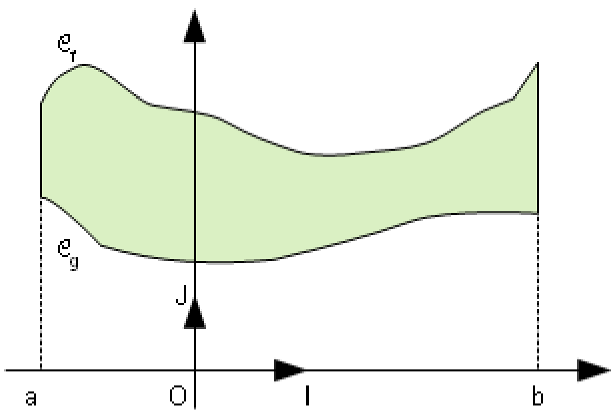
Théorème (admis) (linéarité de l'intégrale) : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit λ un réel.
On a : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

1.4 Autres propriétés

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est égale à : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Preuve : On subdivise $[a\,;\,b]$ en autant d'intervalles que nécessaire sur lesquels f garde un signe constant et on fait la somme.

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, avec $f < g$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative respective dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
Alors l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b (f-g)(x)dx$



Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Preuve : Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx$ représente une aire, qui est donc positive.$\square$

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

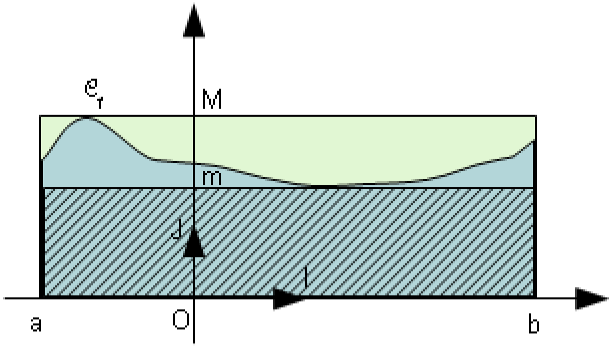
Preuve : On applique la propriété précédente à $g - f$, qui est positive sur $[a\,;\,b]$ et on utilise la linéarité de l'intégrale.$\square$

Théorème (inégalité de la moyenne) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

Preuve : On applique la propriété précédente, comme pour $x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x)$, on a : $\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et donc puisque $\int_a^b m\mathrm{d}x = m(b-a)$, $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

De même, on a : pour $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant M$, on a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$ et donc puisque $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$. □

Remarque :Graphiquement pour une fonction positive, l'aire sous la courbe est comprise entre celle d'un rectangle d'hauteur le mimimum et celle d'un autre rectangle d'hauteur le maximum, d'où le nom du théorème.



Théorème (inégalité de la moyenne bis) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit M un réel.
Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $|f(x)| \leqslant M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,|b-a|$.

Preuve : On applique le théorème précédent, comme pour $x \in [a\,;b]$, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, on a : $-M(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$, d'où le résultat. □

Théorème (admis) : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période T.
Alors, pour tout réel a, $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

2 Intégration et dérivation

2.1 Primitives

2.1.1 Généralités

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$.

Exemple : $x \mapsto x$ admet pour primitive : $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F sur I.
(i) Alors $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.
(ii) Soit G une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ (autrement dit deux primitives d'une fonction différent d'une constante).

Preuve : (i) On note : $G : x \mapsto F(x) + c$. G est dérivable sur I comme somme d'une fonction dérivable sur I et d'une constante. On a pour $x \in I$: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I.

(ii) $G - F$ est dérivable sur I et pour $x \in I$: $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une constante c sur I et donc pour $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, d'où le résultat.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives sur I.
Soit $(x_0\,; y_0)$ un couple de réels, tel que $x_0 \in I$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Preuve : Soit G est une primitive de f sur I. Comme deux primitives de f sur I différent d'une constante, on va construire F tel que $F(x_0) = y_0$. Soit c tel que $G(x) = F(x) + c$ et $F(x_0) = y_0$, alors : $G(x_0) = F(x_0) + c$ et donc $c = G(x_0) - y_0$. Ainsi : $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.

F est bien une primitive de f et $F(x_0) = y_0$.□

Théorème fondamental de l'intégration (existence d'une primitive pour les fonctions continues) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit a un réel de I.
Alors la fonction f admet une unique primitive F s'annulant en a et $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Preuve :
Existence : On pose $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Prouvons que F est dérivable en tout x_0 de I.
$\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right)=\dfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$
On a : $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\dfrac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t-f(x_0)(x-x_0)\right|=\dfrac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0)\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x$
Or, f est continue en x_0, donc pour $\epsilon>0$, lorsque x est suffisamment voisin de x_0, on a : $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.
Ainsi pour x proche de x_0, on a : $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\leqslant\dfrac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x \epsilon\mathrm{d}t=\epsilon$
et donc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$ et donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$. De plus $F(x_0)=0$.
L'unicité résulte de la propriété précédente.□

Corrolaire. Notation : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I.
Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.
$F(b)-F(a)$ se note : $[F(x)]_a^b$.
On écrit ainsi : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=[F(x)]_a^b$

Preuve : Immédiate par la relation de Chasles.

2.1.2 Calculs de primitives

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, admettant sur I des primitives F et G. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
Alors : (i) $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I
(ii) λF est une primitive de λf sur I.

Fontion f	Primitive F	sur l'intervalle
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{si } n<-1\\ \mathbb{R} & \text{si } n\geqslant 0\end{cases}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k\in\mathbb{Z}$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x\in I$, $f(x)=u'(x)\times g'(u(x))$, où g et u sont deux fonctions, définies et dérivables convenablement. Alors f admet comme primitive sur I, $g\circ u$.

On obtient ainsi le tableau suivant, avec u fonction définie sur I

Fontion f	Primitive F	Remarques
$f=u'u^n\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$F=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases}I\setminus\{x\,:\,u(x)=0\} & \text{si } n<-1\\ I & \text{si } n\geqslant 0\end{cases}$
$f=\dfrac{u'}{u}$	$\begin{cases}F=\ln u\\ F=\ln(-u)\end{cases}$	$\begin{cases}u>0 \text{ sur } I\\ u<0 \text{ sur } I\end{cases}$
$f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$f=u'e^u$	$F=e^u$	I
$x\mapsto u(ax+b)\ (a\neq 0)$	$F(x)=\dfrac{1}{a}U(ax+b)$	U primitive de u sur I

2.2 Intégration par parties

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de dérivées respectives u' et v'. Soit a et b deux réels de I.
Alors $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$

Preuve : Comme u et v sont dérivables sur I, uv est aussi dérivable sur I et $(uv)'=u'v+v'u$.
Ainsi $\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b (u'(t)v(t)+u(t)v'(t))\,\mathrm{d}t$, et donc $[u(t)v(t)]_a^b=\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t+\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, d'où le résultat.

Exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\mathrm{d}t$.
On pose $v(t)=t^2$ et $u'(t)=\sin t$. On a : $v'(t)=2t$ et $u(t)=-\cos t$.

On a alors : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \mathrm{d}t = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t(-\cos t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \mathrm{d}t$.
On pose $v(t) = t$ et $u'(t) = \cos t$. On a : $v'(t) = 1$ et $u(t) = \sin t$.
D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \mathrm{d}t = [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \mathrm{d}t = 2\left[\frac{\pi}{2} + 1\right] = \pi + 2$.
