
CHAPITRE 10 SUITES ET LIMITES.

1 Convergence d'une suite

1.1 Généralités (rappels)

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et a pour limite l si pour tout intervalle ouvert contenant l , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. Autrement dit, une suite est convergente de limite l , lorsque les termes de la suite approchent d'aussi près que l'on veut le réel l pour n suffisamment grand.

Propriété : $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et a pour limite l ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a : $u_n \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$

Soit $\epsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$

Soit N le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a : $u_n \in]-\epsilon; +\epsilon[$. Et donc (u_n) est convergente de limite 0.

Suivant le même principe, on montre que $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ convergent et ont pour limite 0.

Remarques : (i) Dans le cas d'une suite convergente, il y a donc un nombre fini de termes en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon; l + \epsilon[$.

(ii) Cela revient à écrire que :

« pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. »

Autrement dit que : « l'inégalité $|u_n - l| < \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »

(ii) Cela revient aussi à dire que :

« la double inégalité : $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »

Propriété : Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite l , alors l est unique.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) convergente admette deux limites l_1 et l_2 , avec $l_1 \neq l_2$. On pose $\epsilon = |l_1 - l_2|$. On a $\epsilon > 0$, car $l_1 \neq l_2$.

Comme (u_n) est convergente de limite l_1 , il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a : $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$.

Comme (u_n) est convergente de limite l_2 , il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, on a : $|u_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$.

Donc, pour $N = \max(N_1; N_2)$: $\epsilon = |l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, contradiction.

Donc $l_1 = l_2$. \square

Notation : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente de limite l . On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; B[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété : $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a : $u_n > A$.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si et seulement si pour tout $B < 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a : $u_n < B$.

Exemple : $u_n = \sqrt{n}$.

Soit $A > 0$. $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$. Soit N le premier entier naturel supérieur à A^2 . Alors, pour tout $n \geq N$, on a : $u_n > A$. On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

1.2 Opérations sur les limites (rappels)

Propriété : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	0
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.3 Comparaison de suites (rappels)

Propriété : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $|u_n - l| \leq v_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Preuve : Soit N_1 tel que pour $n \geq N_1$ on a : $|u_n - l| \leq v_n$.

Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$: $v_n < \epsilon$.

Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \geq N$, on a : $|u_n - l| \leq v_n < \epsilon$, et donc $u_n \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. \square

Propriété : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives l et l' , alors $l \leq l'$.

Preuve : Soit N_1 tel que pour $n \geq N_1$ on a : $u_n \leq v_n$.

Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$: $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$, il existe N_3 tel que pour $n \geq N_3$: $l' - \epsilon < v_n < l' + \epsilon$.

Soit $N = \max(N_1; N_2; N_3)$. Pour $n \geq N$, on a : $l - \epsilon < u_n \leq v_n < l' + \epsilon$ et donc $l \leq l'$. \square

Théorème (dit des gendarmes) : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$, $(v_n)_{n \geq n_1}$ et $(w_n)_{n \geq n_2}$ trois suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de limites l , alors (v_n) est convergente et admet pour limite l .

Preuve : Soit N_1 tel que pour $n \geq N_1$ on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$: $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, il existe N_3 tel que pour $n \geq N_3$: $l - \epsilon < w_n < l + \epsilon$.

Soit $N = \max(N_1; N_2; N_3)$. Pour $n \geq N$, on a : $l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon$ et donc (v_n) est convergente et admet pour limite l . \square

Exemple : Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{\cos n}{n}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, on a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Et donc comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$.

(i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : (i) Soit N_1 tel que pour $n \geq N_1$ on a : $u_n \leq v_n$.

Soit $A > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$: $A < u_n$.

Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \geq N$, on a : $A < u_n \leq v_n$ et donc (v_n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Preuve analogue \square

Exemple : Calculer la limite de (u_n) où $u_n = n^2(2 - \cos n)$

On a : $-1 \leq \cos n \leq 1$, d'où : $1 \leq 2 - \cos n \leq 3$ et donc $n^2 \leq u_n \leq 3n^2$.

Par suite, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

1.4 Cas des suites arithmétiques et géométriques (rappels)

Théorème : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison a .

Si $a > 0$, alors (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $a < 0$, alors (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : On a : $u_n = u_0 + na$, donc comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et que :

si $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} an = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

si $a < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} an = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. \square

Théorème : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q , de premier terme $u_0 > 0$.

(i) Si $q > 1$, alors (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(ii) Si $q = 1$, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

(iii) Si $-1 < q < 1$, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(iv) Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) diverge.

Preuve : (i) Soit $q > 1$.

On considère pour $n \geq 2$, la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1+x)^n - (1+nx).$$

Pour $x \geq 0$, on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$, et donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$. En particulier, $f(0) = 0$.

Comme $q - 1 > 0$, on a : $f(q-1) \geq f(0)$ et donc : $q^n \geq 1 + n(q-1)$, ou encore puisque $u_0 > 0$, $u_n \geq u_0(1 + n(q-1))$.

Donc puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q-1) = +\infty$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(ii) Immédiat, car (u_n) est constante.

(iii) Soit $0 < q < 1$. On pose $q' = \frac{1}{q}$. On a : $q' > 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q'^n = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q'^n} = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Si $q = 0$, la suite est constante à partir de u_1 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_1 = 0$.

Soit $-1 < q < 0$. On pose $q' = |q|$. On a : $0 < q' < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q'^n = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -q'^n = 0$. Or : $-q'^n \leq q^n \leq q'^n$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(iv) Les valeurs de q^n sont alternativement dans $]-\infty; -1]$ et dans $[1; +\infty[$. Donc la suite ne peut admettre ni $+\infty$, ni $-\infty$ comme limites.

Si la suite admet l comme limite, alors tout intervalle ouvert contenant l , contiendrait un nombre infini de valeurs de la suite à partir d'un certain rang. Soit I un tel intervalle, alors I contiendrait à la fois des nombres inférieurs à -1 et d'autres supérieurs à 1 . Donc I serait au moins de longueur 2 . Ce qui n'est pas le cas de tous les intervalles, par exemple : $]l-0,5; l+0,5[$. Donc la suite ne converge pas vers l , et donc elle est divergente. \square

1.5 Cas des suites du type...

1.5.1 $u_n = f(n)$ (rappels)

Théorème : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle que : $u_n = f(n)$, où f est définie sur $[n_0; +\infty[$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$, où c est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, alors :

- si c est un réel, (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

- si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

Preuve : Assez naturel, on passe au discret... \square

1.5.2 $u_n = f(v_n)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur I . Soit $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle que tout les éléments à partir d'un certain rang n_1 sont dans I . Soit $(u_n)_{n \geq n_1}$ une suite telle que : $u_n = f(v_n)$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$, où a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

- si c est un réel, (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

- si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

Preuve : Admis \square

1.6 Cas des suites monotones

1.6.1 Vocabulaire

Définition : Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$. Soit m et M deux réels.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite :

- majorée par M si pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq M$
- minorée par m si pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n \geq m$
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples : La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+2}$ est minorée par $\sqrt{2}$ mais n'est pas majorée.

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sin n$ est bornée.

La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{n}$ est également bornée.

La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = (-2)^n$ n'est ni minorée, ni majorée.

1.6.2 Etude de la convergence

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante et majorée converge.

(ii) Toute suite décroissante et minorée converge.

Preuve (principe et non exigible) : (i) Soit (u_n) une suite croissante et majorée par un nombre M . Alors (admis) l'ensemble des majorants de (u_n) admet un plus petit élément, noté M_0 (l'existence de ce plus petit majorant est une propriété admise de \mathbb{R}).

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M_0 - \epsilon < u_{n_0} \leq M_0$ (sinon M_0 n'est pas le plus petit majorant...). Et donc, comme (u_n) est croissante, on a pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]M_0 - \epsilon; M_0]$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, (u_n) converge et est de limite M_0 .

(ii) Preuve analogue. \square

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve : (i) Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Soit $A > 0$, comme (u_n) n'est pas majorée, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > A$.

Et donc comme ceci est valable pour tout $A > 0$, (u_n) diverge et admet comme limite $+\infty$.

(ii) Preuve analogue. \square

Remarque : Il existe des suites non croissantes qui ont pour limite $+\infty$ (par exemple $u_n = n(2 + \cos n)$). Le théorème précédent donne une condition suffisante pour qu'une suite admette comme limite $+\infty$, qui n'est pas une condition nécessaire.

Idem pour le premier théorème du paragraphe (prendre par exemple $u_n = \frac{1}{n}(2 + \cos n)$ qui converge vers 0 mais qui n'est pas monotone)

2 Suites adjacentes

Définition : Deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la suite formée par leur différence tend vers 0.

Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Preuve : Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. On suppose que (u_n) croît et (v_n) décroît.

Prouvons d'abord que pour tout n : $u_n \leq v_n$ autrement dit que : $v_n - u_n \geq 0$

On a : $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$. Or (u_n) croît, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (v_n) décroît donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc : $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leq 0$ et donc $(v_n - u_n)$ décroît. Or elle tend vers 0, donc elle est minorée par 0 et donc $u_n \leq v_n$.

Ainsi la suite (u_n) croît, est majorée par v_0 donc converge et est de limite l . De même, la suite (v_n) décroît, est minorée par u_0 donc converge et est de limite l' .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l - l'$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, d'où : $l = l'$. \square

Remarque : On retiendra que lorsque deux suites sont adjacentes, celle qui croît est toujours inférieure ou égale à tous termes de celle qui décroît.

Exemple : Soit $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. Déterminer six décimales de leur limite e .

Résolution : 1. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$, donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{1}{n!}$, donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc ces deux suites sont adjacentes.

2. Comme (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles sont convergentes et ont même limite, notée e .

On a : $u_n \leq e \leq v_n$

On cherche sept décimales de cette limite, on a : $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Donc on cherche n tel que $\frac{1}{n!} \leq 10^{-6}$, autrement dit $n \geq 10^6$. $n = 10$ convient.

On a alors : $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} \approx 2,718281$