Chapitre 09 Eléments de combinatoire.

L'objectif est de connaître quelques techniques de dénombrement, afin de pour compter les issues de certaines épreuves aléatoires.

1 Des situations de référence

1.1 Tirages successifs avec remise

On tire dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, une boule dont on note le numéro, que l'on remet ensuite dans l'urne. On procède ainsi à p tirages (successifs avec remise). L'ordre a une importance, mais les èlements peuvent être répétés.

Propriété : Après p tirages successifs avec remise, le nombre de listes de longueur p formées de numéros des n boules se trouvant dans l'urne, appelé p-liste, est n^p

Preuve : A chaque tirage on a n choix possibles, et l'on effectue p tirages (faire un arbre)

1.2 Tirages successifs sans remise

On tire dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, une boule dont on note le numéro, que l'on ne remet pas dans l'urne. On procède ainsi à p tirages (successifs sans remise) (avec $p \leqslant n$). L'ordre a une importance, mais les éléments ne peuvent pas être répétés.

Définition : Une p-liste sans répétition est appelé un p-arrangement ou arrangement des p-éléments.
Lorsque $p = n$, on parle de permutation des n éléments.

Propriété : Après p tirages successifs sans remise, le nombre de listes de longueur p formées de numéros distincts des n boules se trouvant dans l'urne est $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$

Preuve : A chaque tirage, on a 1 choix de moins qu'au précédent, ainsi au premier tirage on a n choix possibles, au deuxième tirage $n-1$, au troisième $n-2$, ... au p-ième $n-p+1$ choix possibles, d'où le résultat.
Remarque : L'ordre du tirage ici a une importance : on regarde des p-uplets.

Propriété : Après n tirages successifs sans remise, le nombre de listes de longueur n formées de numéros distincts des n boules se trouvant dans l'urne est $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$

Preuve : C'est la propriété précédente dans le cas où toutes les boules sont tirées une à une. Cela correspond au nombre de permutations de n èlements.

Définition : Soit n un entier non nul.
On appelle factorielle n, et l'on note $n!$, le nombre $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Convention : On pose $0! = 1$.
Remarque : Ainsi le nombre de p-arrangements est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. On note ce nombre : A_n^p.
Le nombre de permutations d'une liste de n èlements est : $n!$

1.3 Tirage simultané

On tire simultanément p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. L'ordre n'a pas d'importance, les éléments ne peuvent pas être répétés.

Définition : On obtient ainsi un ensemble (nécessairement non ordonné) de p numéros appelé combinaison de p èlements parmi n.

Propriété : Le nombre de combinaisons de p èlements parmi n (avec $p \leqslant n$) est le nombre noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, qu'on lit ≪ p parmi n ≫ (ou encore ≪ nombre de combinaisons de p èlements parmi n ≫), et qui est égal à : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Preuve : On a vu que lorsque l'on avait une liste ordonnée de p élèments parmi n, le nombre de choix était de $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
On a également vu qu'il y avait $p!$ manières d'ordonner p élèments.
D'où le nombre de combinaisons de p élèments parmi n.
Convention : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

1.4 Un exemple

Un alphabet comprend 4 lettres a, b, c et d.
Le nombre de mots de 4 lettres est : $4^4 = 256$.
Le nombre de permutations de ces quatre élèments est : $4! = 24$. Cela correspond au nombre de mots de 4 lettres distinctes formables avec ces 4 élèments.
Le nombre de sous-ensembles de 4 lettres parmi les 4 est : $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{4!} = 1$. C'est : $\{a, b, c, d\}$.
Le nombre de sous-ensembles de 3 lettres parmi les 4 est : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{1!3!} = 4$. Ce sont : $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.
Le nombre de sous-ensembles de 2 lettres parmi les 4 est : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$. Ce sont : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.
Le nombre de sous-ensembles de 1 lettre parmi les 4 est : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$. Ce sont : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.
Le nombre de sous-ensembles de 0 lettre parmi les 4 est : $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{4!0!} = 1$. Ce sont : $\emptyset$.

1.5 Techniques de dénombrement

En résumé :

	Répété	Non répété
Ordonné	p-listes	p-arrangements
Non ordonné	H.P.	p-combinaisons

	Répété	Non répété
Ordonné	p tirages avec remise	p tirages successifs sans remise
Non ordonné	H.P.	tirage simultané de p éléments distincts

A noter :Quand les éléments sont ordonnés, on peut utiliser pour raisonner la technique des cases.
Exemples :
- 1. Au Keno, on tire 20 numéros, parmi 70 numéros. Quel est le nombre de tirages possibles ?
  Cela correspond à un tirage simultané sans remise. Il y a $\begin{pmatrix} 70 \\ 20 \end{pmatrix} = \dfrac{70!}{50!20!} \approx 1,618 \times 10^{17}$ tirages possibles.
- 2. Un commerçant a dans son magasin trois vitrines, numérotées de 1 à 3 (dans l'ordre de l'impact visuel). Il peut mettre dans chacune de ces vitrines un seul objet parmi 20 objets qu'il a sélectionné. Combien peut-il faire de vitrines ?
  Ici l'ordre a une importance, cela revient à faire un 3-arrangement des 20 objets. Ainsi il y a $\dfrac{20!}{(20-3)!} = 20 \times 19 \times 18 =$ $6\,840$ vitrines possibles.
- 3. Combien y a-t-il de plaques minéralogiques possibles en france (constituées de 2 lettres, 3 chiffres, 2 lettres) ?
  L'ordre a une importance, les lettres peuvent être répétées, les chiffres aussi.
  Il y a donc $26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$ plaques d'immatriculation possibles.

Quand les éléments ne sont pas ordonnés et non répétés, on utilise les combinaisons. Pour cela on peut retenir que quand on utilise plusieurs combinaisons :

1. Il faut *multiplier* lorsque les différentes étapes sont reliées par un *et*.
2. Il faut *additionner* lorsque les différentes étapes sont reliées par un *ou*.

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une main de 5 cartes.
1. Quel est le nombre de mains contenant exactement deux valets et une dame ?
2. Quel est le nombre de mains possédant au moins deux as ?
1. La situation est *multiplicative* :
- on choisit deux valets parmi les quatre : il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ façons de faire ;
- puis on choisit une dame parmi les quatre dames du jeu : il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ façons de faire ;
- reste alors à choisir deux cartes, qui ne sont ni des valets, ni des dames, c'est à dire parmi les $32 - 8 = 24$ cartes restantes : il y a $\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \end{pmatrix}$ façons de faire.

Au total, il y a donc : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times 4 \times 276 = 6\,624$ mains possédant exactement deux valets et une dame.

2. Le nombre de mains possédant au moins deux as correspond au nombre de mains possédant exactement deux as ou exactement trois as ou exactement 4 as.

Pour avoir exactement 2 as, on choisit 2 as parmi les 4, puis 3 cartes parmi les 28 restantes, soit $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix}$ possibilités.

Pour avoir exactement 3 as, on choisit 3 as parmi les 4, puis 1 carte parmi les 28 restantes, soit $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix}$ possibilités.

Pour avoir exactement 4 as, on choisit 4 as parmi les 4, puis 3 cartes parmi les 28 restantes, soit $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \end{pmatrix}$ possibilités.

Ainsi $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times \dfrac{28 \times 27 \times 26}{6} + 4 \times \dfrac{28 \times 27}{2} + 1 \times 28 = 25\,840$ mains possédant au moins deux as.

2 Coefficients binomiaux

2.1 Formules relatives aux combinaisons

<u>Propriété :</u> Pour tous entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$, on a : $\begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

<u>Preuve :</u> $\begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$□

<u>Théorème (relation de Pascal) :</u> Pour tous entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$, on a : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$

<u>Preuve :</u> 1. Méthode calculatoire

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!\,(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Méthode réfléchie

Soit $E = \{e_1, ..., e_n, a\}$ un ensemble à $n+1$ élèments.

Il y a $\begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$ façons de choisir $p+1$ élèments parmi les $n+1$.

On peut aussi considèrer que ce choix peut se faire en comptant les sous-ensembles de E avec $p+1$ élèments contenant a et ceux ne contenant pas a.

Pour ceux ne contenant pas a, cela revient à choisir $p+1$ élèments parmi les n distincts de a. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix}$ façons de le faire.

Pour ceux contenant a, cela revient à choisir p élèments parmi les n distincts de a. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ façons de le faire.

D'où le résultat obtenu en additionnant.□

2.2 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal, basé sur la relation portant son nom, permet de calculer les $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ par un processus itératif, encore appelé table des coefficients binômiaux.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
...										

2.3 Binôme de Newton

<u>Théorème :</u> Pour tous réels a et b, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$.

<u>Preuve :</u> Se fait par récurrence sur n. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$

<u>Initialisation :</u>

Pour $n=1$, on a : $(a+b)^1 = a+b$ et $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a^{1-0} b^0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a^0 b^1 = a+b$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité :</u>

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k \right) (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k a \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k b \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n+1-k} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^{k+1} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n+1-k} b^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} a^{n+1-k} b^k \right) \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^{n+1} b^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \right) a^{n+1-k} b^k \right) + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a^0 b^{n+1} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} a^{n+1} b^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} a^{n+1-k} b^k \right) + \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Et donc pour tout entier naturel non nul, on a : $\mathcal{P}_n$ est vraie.$\square$

<u>Exemple :</u> $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, etc ...