
CHAPITRE 06 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN.

1 Vers une nouvelle fonction

1.1 Bijection. Fonction réciproque

Définition : Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :

- pour tout réel x de I , son image par f , $f(x)$ est dans J ;
- pour tout réel y de J , il existe un unique x dans I antécédent de y par f .

Définition : Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit une bijection f de I sur J .
On appelle fonction réciproque de f , la fonction notée g qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f (autrement dit $f(x) = y$). Autrement dit $g(y) = x$.

Remarque : Avec les mêmes notations, on a : $g(y) = x$ ssi $f(x) = y$

Théorème de la bijection (rappel) : Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit f une fonction définie sur I
Si f est continue et strictement monotone, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (où $f(I)$ est l'image de l'intervalle I par f).

Preuve : Voir le chapitre sur la continuité \square

Remarque : Si f est continue et strictement monotone, alors f admet une fonction réciproque de $f(I)$ sur I .

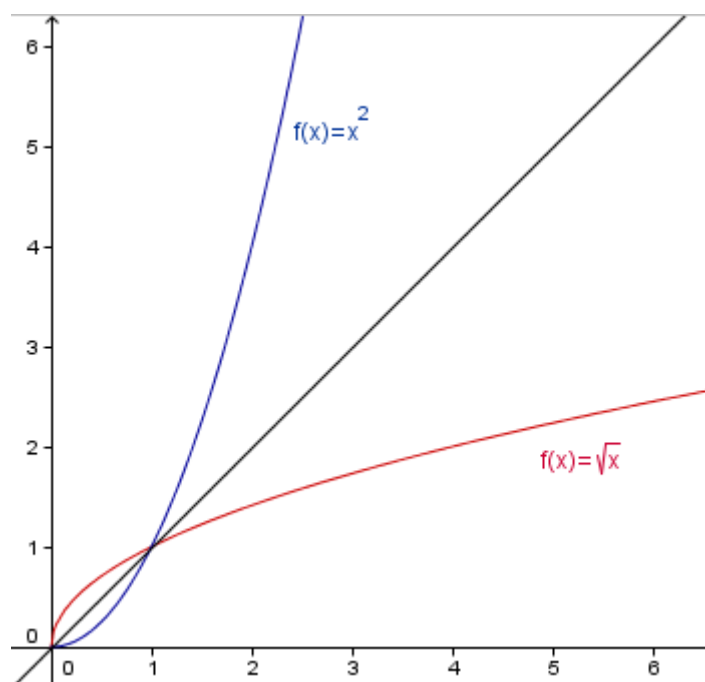
Exemple : La fonction carré est continue strictement croissante de $[0; +\infty[$ sur lui-même. Elle admet une bijection réciproque la fonction racine.

Propriété : Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J . Soit C_f sa courbe représentative.
Soit g la fonction réciproque de f et C_g sa courbe représentative.
Alors C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve : $M(x; y) \in C_f$ ssi $y = f(x)$ ssi $x = g(y)$ ssi $N(y; x) \in C_g$.

$M(x; y)$ et $N(y; x)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$: en effet leur milieu appartient à cette droite et la droite (MN) a pour coefficient directeur : $\frac{y-x}{x-y} = -1$, ce qui signifie qu'elle est perpendiculaire à la droite Δ . \square

Exemple :



1.2 Une nouvelle fonction

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ est définie, continue, strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'image de \mathbb{R} par la fonction \exp est $]0; +\infty[$ et pour tout x dans $]0; +\infty[$, l'équation $e^t = x$, d'inconnue t , admet une unique solution, que l'on note $\ln x$. Ainsi $\ln x$ est le nombre dont l'exponentielle est x .

Définition : La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0; +\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x .

Conséquences :

- (i) Pour tout $x > 0 : e^{\ln x} = x$
- (ii) Pour tout $x > 0 : \ln e^x = x$
- (iii) $\ln 1 = 0$
- (iv) $\ln e = 1$

Preuve : (i) découle de la définition

(ii) $\ln e^x$ est le seul réel dont l'exponentielle est e^x , c'est à dire x .

(iii) $\ln 1 = \ln e^0 = 0$

(iv) $\ln e = \ln e^1 = 1 \square$



FIGURE 1 – John Napier (1550-1617)(dit Néper en France)
(source Wikipedia)

Théorème : Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
 $y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$

Preuve : Si $y = \ln x$ alors $e^y = e^{\ln x} = x$

Si $e^y = x$ alors comme $x > 0$, $\ln e^y = \ln x$ ou encore $y = \ln x \square$

Théorème : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\ln ab = \ln a + \ln b$

Preuve : La fonction \exp est continue et strictement croissante de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

De plus $a > 0$, il existe donc d'après le théorème de la bijection, un unique réel x tel que $e^x = a$. Ce qui équivaut à $x = \ln a$

De même $b > 0$, il existe donc d'après le théorème de la bijection, un unique réel y tel que $e^y = b$. Ce qui équivaut à $y = \ln b$

On a : $\ln ab = \ln e^x e^y = \ln e^{x+y} = x + y = \ln a + \ln b$

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\ln \left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ et $\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Preuve : $0 = \ln 1 = \ln \left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln \left(\frac{1}{b}\right) + \ln b$. D'où : $\ln \left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

$\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln \left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b \square$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels $a_i > 0$, avec $1 \leq i \leq n$ on a : $\ln \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln a_i$

Preuve : On va tout d'abord établir le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On note \mathcal{P}_n la proposition $\ln \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln a_i$

Pour $n = 1$, $\ln \left(\prod_{i=1}^1 a_i\right) = \ln a_1$ et $\sum_{i=1}^1 \ln a_i = \ln a_1$, donc \mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose que \mathcal{P}_n est vraie.

Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est encore vraie. On a :

$\ln \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) + \ln a_{n+1} = \sum_{i=1}^n \ln a_i + \ln a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \ln a_i$.

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{P}_n est vraie. \square

Propriété : Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\ln(a^n) = n \ln a$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a en posant $a_i = a$ pour $1 \leq i \leq n$: $\ln a^n = \ln \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln a_i = n \ln a$.

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On pose $n' = -n$. $n' > 0$.

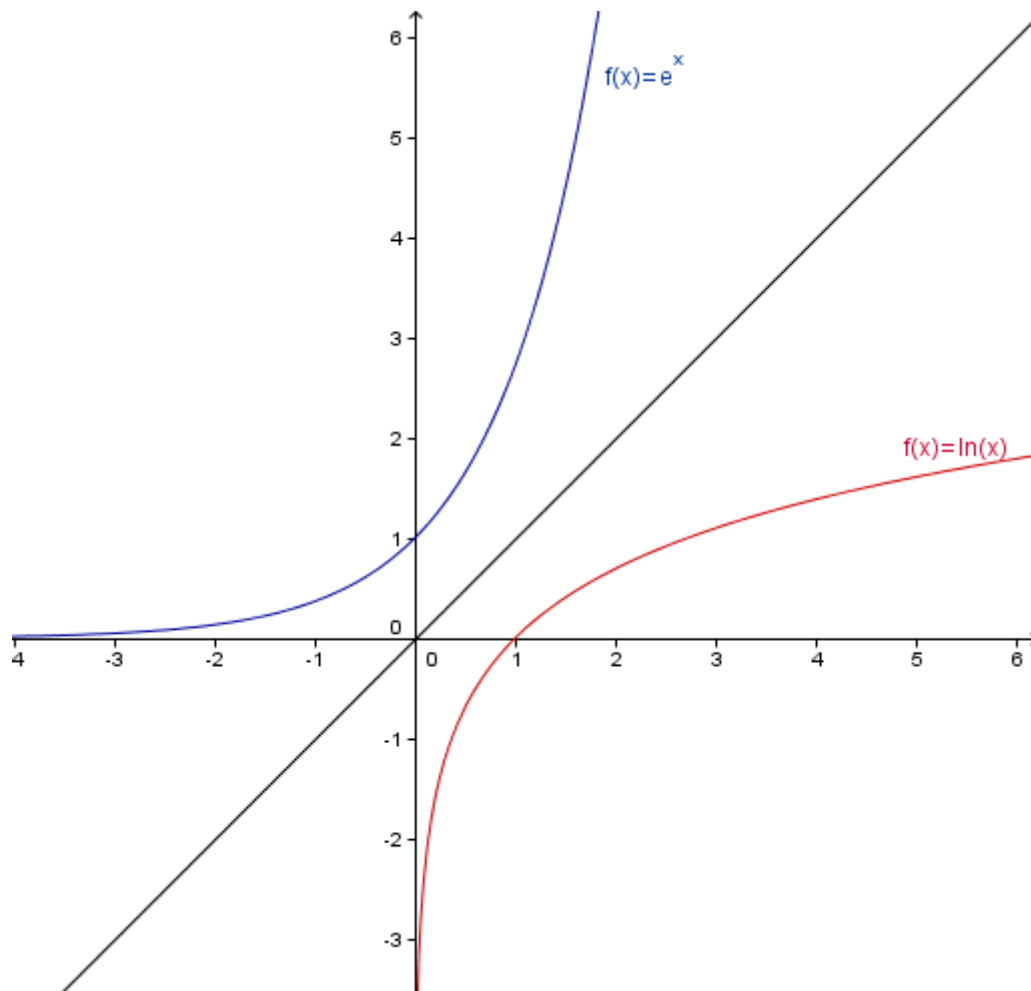
On a : Si $n = 0$, on a : $\ln a^n = \ln 1 = 0$ et $n \ln a = 0$ d'où le résultat.

Propriété : Pour tout réel $a > 0$, on a : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Preuve : Pour $a > 0$, $\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln \sqrt{a}$, d'où l'égalité.

2 Etude de la fonction logarithme népérien

Théorème : La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Preuve : On applique les résultats du paragraphe 1.1. \square

Théorème : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve : Soit $0 < u < v$. On a donc : $0 < e^{\ln u} < e^{\ln v}$ et donc comme la fonction exponentielle est strictement croissante on a : $\ln u < \ln v$ et donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquence : Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

- $\ln a = \ln b$ ssi $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ ssi $a < b$;
- $\ln a > 0$ ssi $a > 1$;
- $\ln a < 0$ ssi $0 < a < 1$.

Preuve : Cela découle directement de la stricte croissance du logarithme népérien. \square

Propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

Preuve : Soit $A > 0$. On a : $\ln x > A$ qui équivaut à $x > e^A$. En posant $B = e^A$, on a donc pour $x > B$, $\ln x > A$. Ceci est valable pour A aussi grand que voulu, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$. Alors $\ln x = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln X$. Comme lorsque x tend vers 0, X tend vers $+\infty$, on a :
 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$ \square

Propriété : La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Preuve : (i) Montrons que la fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme : Pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$

Preuve du lemme : Supposons que pour $x > 0$, $\ln x > x - 1$.

Par stricte croissance de l'exponentielle on aurait : $x > e^{x-1}$ et en posant $t = x - 1$, on aurait : $t + 1 > e^t$

On pose $f(t) = e^t - t - 1$. f est dérivable sur \mathbb{R} et l'on a : $f'(t) = e^t - 1$

$f'(t) > 0$ équivaut à $e^t > 1$ équivaut à $t > 0$

et donc on obtient le tableau de variation suivant :

	$-\infty$	0	$+\infty$
<i>Signe de $f'(t)$</i>	-		+
<i>Variations de f</i>	$+\infty$	\searrow	0
		\nearrow	$+\infty$

D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $e^t \geq t + 1$.

Par suite, on obtient une contradiction et donc on a bien le résultat annoncé dans le lemme.

Preuve de la propriété (suite) : On a donc pour $x \geq 1$, $0 \leq \ln x \leq x - 1$, et donc d'après le théorème des « gendarmes » on

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln x = 0.$$

Pour $0 < x < 1$, on a : $\ln x < 0$ ou encore $-\ln x > 0$ c'est à dire $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Or d'après le lemme $0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$, soit encore $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x < 0$ d'où d'après le théorème des « gendarmes », on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln x = 0$.

Limite à gauche et à droite de 1 étant égales, \ln admet 0 comme limite en 1, d'où la continuité de \ln en 1.

Soit $a > 0$. Soit h tel que $a + h > 0$.

$$\text{On a : } \ln(a + h) = \ln a \left(1 + \frac{h}{a}\right) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)$$

$$\text{Or comme } \ln \text{ est continue en } 1, \text{ on a : } \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) = 0 \text{ et donc } \lim_{h \rightarrow 0} \ln(a + h) = \ln a \text{ et donc } \ln \text{ est continue en } a.$$

La fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* . □

Propriété : La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $y = \ln x$ et $b = \ln a$. Comme la fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* , on a : $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a = b$

$$\tau(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{y - b}{e^y - e^b}.$$

Or la fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} , donc $\lim_{y \rightarrow b} \frac{e^y - e^b}{y - b} = e^b$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow a} \tau(x) = e^{-b} = e^{-\ln a} = \frac{1}{a}.$$

Donc la fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Tableau de variation :

	0	1	$+\infty$
<i>Signe de $\ln'(x)$</i>	+	1	+
<i>Variations de \ln</i>	$-\infty$	\nearrow	0
		\nearrow	$+\infty$

Représentation graphique : Voir le début de paragraphe

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives.

Alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Preuve : On applique le théorème sur la dérivation des fonctions composées.

Propriété :

$$- \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad - \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad - \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad - \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Preuve : (i) On pose $X = \ln x$, d'où : $x = e^X$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$.

$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$. Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. D'où le résultat.

(ii) On pose $X = \frac{1}{x}$. On a : $\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$. On a : $x \ln x = \frac{-\ln X}{X}$.

D'après (i), on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, d'où (ii).

(iii) $f : x \mapsto \ln x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et donc en particulier en 1.

Donc le taux de variation en 1, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\ln x}{x - 1}$ admet une limite en 1, correspondant au nombre dérivé en 1.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = f'(1) = 1$.

(iv) On pose $X = 1 + x$. On a : $\lim_{x \rightarrow 0} X = 1$.

On a : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln X}{X-1}$ et donc en utilisant (iii), on a (iv). \square

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$:

Pour h voisin de 0, on a : $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Preuve : Pour $h \neq 0$, on pose $\epsilon(h) = \frac{\ln(1+h)}{h} - 1$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

D'où pour h proche de 0, $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. \square

3 La fonction logarithme décimal

Définition : La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x de $]0; +\infty[$, associe le réel $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque : $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$

Théorème : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\log ab = \log a + \log b$

Preuve : On a : $\log ab = \frac{\ln ab}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$ \square

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

Preuve : $\log\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{-\ln b}{\ln 10} = -\log b$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln 10} = \log a - \log b$ \square

Propriété : Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\log(a^n) = n \log a$

Preuve : $\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \log a$ \square

Conséquence : Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\log(10^n) = n$

Preuve : $\log(10^n) = n \log 10 = n$ \square

Application : Papier semi-logarithmique pour la représentation de phénomènes variant sur de nombreuses puissances de