Chapitre 05 Complexes.

1 Introduction aux nombres complexes

1.1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Historiquement, on a tout d'abord introduit $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels, dans lequel on sait additionner et multiplier des nombres entre eux tout en restant dans cet ensemble. Par contre on a des problèmes lorsque l'on veut résoudre l'équation $x + a = b$ suivant les valeurs de a et b.

D'où l'introduction des relatifs au 12e siècle en Italie et au 14e siècle du zéro.

Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs , on sait résoudre l'équation $x + a = b$.

Par contre il reste un problème avec l'équation : $ax = b$ suivant les valeurs de a et b.

Pour cela on construit un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels, dans lequel l'équation $ax = b$ admet une solution pour toute valeur de $a \neq 0$ et de b.

On arrive alors à montrer que certains nombres ($\sqrt{2}$, π...) ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une fraction, d'où l'introduction des nombres réels, dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}$, on sait résoudre l'équation $x^2 = a$ pour $a \geqslant 0$ et des équations d'ordre supérieur.

Jérome Cardan (Pavie, 24 septembre 1501 - Rome, 21 septembre 1576) se rend compte que certaines équations admetttent des solutions réelles mais pour pouvoir les résoudre, il faut à un moment introduit un nombre dont le carré vaut -1.

Figure 1 – Jérome Cardan (source Wikipedia)

C'est au 17e siècle qu'Euler (né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg) adoptera définitivement la définition suivante :

Figure 2 – Leonhard Euler (source Wikipedia)

Définition : On appelle i le nombre tel que : $i^2 = -1$

Définition : On appelle nombre complexe tout nombre z tel que : $z = x + iy$, avec x et y deux nombre réels.
x est appelé partie réelle de z, que l'on notera $Re(z)$.
y est appelé partie imaginaire de z, que l'on notera $Im(z)$.
L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition : Deux nombres complexes sont égaux ssi leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.

Conséquence : L'écriture d'un nombre complexe $z = x + iy$ est unique.

Définition : Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre imaginaire pur.

Définition : On appelle somme de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

Définition : On appelle produit de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe noté

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Remarques : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et en possèdent les propriétés.

Exemple : $z = 3 + 2i$ et $z' = 4 + 7i$
$z + z' = 3 + 2i + (4 + 7i) = 7 + 9i$
$z - z' = 3 + 2i - (4 + 7i) = -1 - 5i$
$zz' = (3 + 2i)(4 + 7i) = 12 + 21i + 8i + 14i^2 = -2 + 29i$

Définition : On appelle opposé d'un nombre complexe z le nombre noté $-z$ et tel que $z + (-z) = 0$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $-z = -x - iy$.

Définition : On appelle différence de deux nombres complexes z et z' le nombre noté $z-z'$ tel que $z-z' = z+(-z')$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nul. Alors $z - z' = x - x' + i(y - y')$.

Exemple : $z = 3 + 2i$ et $z' = 4 + 7i$
$z - z' = 3 + 2i - (4 + 7i) = -1 - 5i$.

Définition : On appelle inverse d'un nombre complexe non nul z le nombre noté $\frac{1}{z}$ et tel que $z \times \frac{1}{z} = 1$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Exemple : $z = 3 + 2i$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 + 2i} = \frac{3 - 2i}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{3 - 2i}{9 + 4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$.

Définition : Soit z et z' deux nombres complexes, avec z' non nul. Alors le quotient de z par z' noté $\frac{z}{z'}$ est le nombre tel que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple : $z = 3 + 2i$ et $z' = 4 + 7i$
$\frac{z}{z'} = \frac{3 + 2i}{4 + 7i} = \frac{(3 + 2i)(4 - 7i)}{(4 + 7i)(4 - 7i)} = \frac{12 - 21i + 8i - 14i^2}{16 - 49i^2} = \frac{26 - 13i}{65} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de relation d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, en obéissant à la même règle des signes. En effet, si tel était le cas i^2 serait à la fois positif ... et négatif puisqu'égal à -1.

1.2 Plan complexe

Définition : On munit un plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère un nombre complexe $z = x+iy$.
On peut toujours considérer que l'on peut associer au nombre z le point M$(x; y)$. On dit alors que z est l'affixe de M et l'on note M(z).
On peut aussi considérer que l'on peut associer au nombre z le vecteur $\vec{v}(x\,;\,y)$. On dit alors que z est l'affixe de $\vec{v}$ et l'on note $\vec{v}(z)$.
Le plan $\mathcal{P}$ est appelé plan complexe.

Vocabulaire : L'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_1})$ est l'ensemble des points M d'affixe réelle, on l'appelle donc l'axe des réels.
L'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_2})$ est l'ensemble des points M d'affixe imaginaire pur, on l'appelle donc l'axe des imaginaires.

Propriété : (i) Soit $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$, alors $\vec{u} + \vec{v}(z + z')$.
(ii) Soit A(z) et B(z') alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z' - z)$ et I milieu de [AB] a pour affixe : $\frac{z + z'}{2}$
(iii) Soit $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)$ n points pondérés du plan, d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$, tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Alors en notant G leur barycentre, G a pour affixe : $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$.

Preuve : Immédiates en utilisant les affixes des vecteurs.□

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle nombre conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ le nombre complexe noté $\bar{z} = x - iy$

Exemple : Le conjugué de $3 + 7i$ est $3 - 7i$.

Interprétation géométrique : Soit M(z) un point du plan complexe. On note M'($\bar{z'}$). Alors M' est l'image de M par rapport à l'axe des réels. L'application M(z) $\mapsto$ M'($\bar{z'}$) est la symétrie d'axe $(O, \vec{i})$.

Propriété : Soit z et z' deux complexes.
(i)$\overline{\overline{z}} = z$
(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
(iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
(v) Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
(vi) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Preuve : On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy$
(ii) $\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{x + x' + i(y + y')} = x + x' - i(y + y') = \overline{z} + \overline{z'}$
(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} = xx' - yy' - i(xy' + x'y) = x(x' - iy') - iy(-iy' + x')$, d'où :
$\overline{z \times z'} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$
(iv) Pour $z \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\dfrac{1}{x + iy}\right)} = \overline{\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}} = \dfrac{x + iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{(x + iy)(x - iy)}{(x^2 + y^2)(x - iy)} = \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(x - iy)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
(v) Pour $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
(vi) On commence par établir le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Vrai pour les premiers termes : immédiat pour $n = 0$, $n = 1$, établi pour $n = 2$
On suppose que cela est vrai pour n, c'est à dire que : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
On a : $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n}\,\overline{z} = (\overline{z})^n \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}^-$, on pose $n' = -n$
On a : $\overline{z^n} = \overline{z^{-n'}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{n'}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{n'}}} = \dfrac{1}{(\overline{z})^{n'}} = (\overline{z})^{-n'} = (\overline{z})^n$.□

Propriété : Soit z un complexe.
$Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Preuve : On pose $z = x + iy$. On a :
$x = \dfrac{1}{2} \times 2x = \dfrac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
$y = \dfrac{1}{2i} \times 2iy = \dfrac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.□

Conséquence : Soit z un complexe.
$z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \overline{z}$
$z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur) ssi $z = -\overline{z}$

Preuve : Immédiate□

2 Vers la forme trigonométrique

2.1 Module d'un nombre complexe

Définition : On appelle module d'un nombre complexe $z = x + iy$ le nombre noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Propriétés :(i) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
(ii) $|zz'| = |z||z'|$
(iii) $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
(iv) $Re(z) \leqslant |z|$
(v) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Preuve : On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
(i) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$
(ii) $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\bar{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$
(iii) $|\frac{z}{z'}| = \sqrt{\frac{z}{z'}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}} = \sqrt{\frac{z\bar{z}}{z'\overline{z'}}} = \frac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sqrt{z'\overline{z'}}} = \frac{|z|}{|z'|}$
(iv) $Re(z) = x \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|$
(v) On peut approcher la démonstration en notant M(z) et M'(z') Soit S le point tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. S(z+z') et l'on a $OS \leqslant OM + OM'$ donc $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
Figure à faire
$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{z+z'} = z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$
$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$, d'où le résultat.□

2.2 Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique

Définition : On appelle argument d'un nombre complexe $z = x + iy$, noté $arg(z)$ l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$, où M est le point du plan complexe d'affixe z.

Remarque : Il existe une infinité d'argument pour un nombre complexe donné. On parle d'argument principal pour l'argument ayant pour valeur comprise dans $]-\pi;\pi]$.

Propriété : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul.
Un argument θ défini à 2π de z est donné par :
$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Ainsi : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Notation : Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et dont un argument est θ, la forme trigonométrique de z est son écriture : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Figure résumé à faire (module, argument, lien forme algébrique forme trigo voir cours TS Fini)

Propriété : Soit $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe avec $r > 0$. Alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta[2\pi]$

Preuve : On a : $|z|^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2$, d'où, comme $r > 0$, $|z| = r$.
Soit θ' un argument de z.
D'après la propriété précédente, on a : $\cos\theta' = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$ et $\sin\theta' = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$, donc $\theta' = \theta[2\pi]$.□

Propriété : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$,
(ii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$,
(iii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$,
(iv) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$,
(v) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
(vi) $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$ où $n \in \mathbb{Z}$

Preuve : On pose $\rho = |z|$. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.
(i) Soit ϕ un argument de $\bar{z}$. Alors $\cos\phi = \cos\theta$ et $\sin\phi = -\sin\theta$, d'où : $\phi = -\theta[2\pi]$.
(ii) On a : $-z = -\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, d'où en notant ψ un argument de $-z$, on a : $\cos\psi = -\cos\theta$ et $\sin\psi = -\sin\theta$, donc $\psi = \theta + \pi[2\pi]$.
On pose $\rho' = |z'|$. $z' = \rho'(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :
(iii) $zz' = \rho\rho'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$, d'où :
$zz' = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$
En notant ν un argument de zz', on a : $\cos\nu = \cos(\theta+\theta')$ et $\sin\nu = \sin(\theta+\theta')$, d'où : $\nu = \theta + \theta'[2\pi]$
(iv) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)$, d'où en notant ϕ' un argument de $\frac{1}{z}$. Alors $\cos\phi' = \cos\theta$ et $\sin\phi' = -\sin\theta$, d'où : $\phi' = -\theta[2\pi]$.
(v) $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, d'où : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi] = \arg(z) - arg(z')[2\pi]$
(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que $\arg(z^n) = n\theta[2\pi]$.
Pour $n = 0$, $z^0 = 1$, d'où $\arg z^0 = 0[2\pi]$ et donc la propriété est vraie au rang 0.

Pour $n=1$, $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, d'où : $\arg z^1 = 1\times\theta[2\pi]$ et donc la propriété est vraie au rang 1.
Pour $n=2$, $z^2=\rho^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$ (cf preuve (iii)), d'où : $\arg z^2 = 2\times\theta[2\pi]$ et donc la propriété est vraie au rang 2.
On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.
$z^{n+1}=z^n z$, donc d'après (iii), on a $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n)+\arg(z)[2\pi] = n\arg(z)+\arg(z)[2\pi] = (n+1)\arg(z)[2\pi]$, et donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$
Soit $n\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. On pose $n'=-n$. On a :$n'\in\mathbb{N}$.
D'où : $\arg(z^n)=\arg\left(z^{-n'}\right) = -\arg(z^{n'})[2\pi]$ d'après le (iv).
Puis : $\arg(z^n) = -n'\arg(z)[2\pi]$, d'après ce que l'on vient de montrer pour $n'\in\mathbb{N}$.
Donc : $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$. D'où (vi).□

Théorème : Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Alors : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B-z_A)[2\pi]$.

Preuve : On note $M(z_M)$ le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$. Alors : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \arg(z_M)[2\pi] = \arg(z_B-z_A)[2\pi]$.

Théorème : Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe. Alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{e_1}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\\
&= -\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\\
&= -\arg(z_B-z_A)+\arg(z_D-z_C)[2\pi]\\
&= \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]
\end{aligned}$$

Propriété : (Formule de Moivre (né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres))
Pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ, on a :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Preuve : Immédiate avec ce qui précéde $\cos\theta+i\sin\theta$ étant un nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ.□

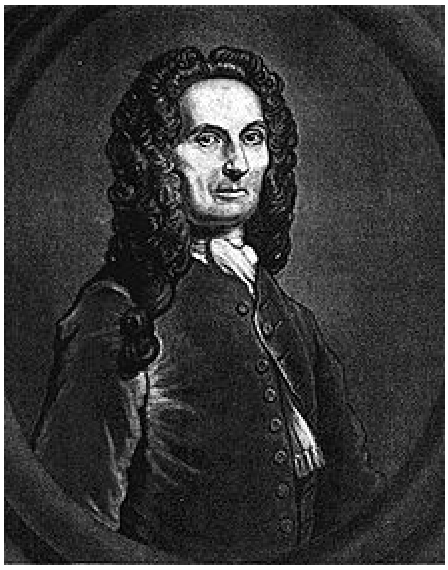

Figure 3 – Moivre (source Wikipedia)

Application : Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.

Résolution : On a :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^3\\
&= \cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\\
&= \cos^3\theta+3i(1-\sin^2\theta)\sin\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)-i\sin^3\theta\\
&= 4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)
\end{aligned}$$

Et donc en identifiant parties réelles et imaginaires, on a : $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ et $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

2.3 Notation d'Euler

Soit $\theta\in\mathbb{R}$
Considérons l'application, $\phi:\theta\mapsto\cos\theta+i\sin\theta$.
Soit $\theta'\in\mathbb{R}$
On a : $\phi(\theta+\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')$.
D'où : $\phi(\theta+\theta') = (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta') = \phi(\theta)\phi(\theta')$.
Et donc ϕ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.
On pose donc pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $\phi(\theta)=e^{i\theta}$.

Notation : Soit z un nombre complexe non nul, de module noté ρ et d'argument θ, la notation d'Euler de z est son écriture : $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété : Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.
Alors : (i) $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
(ii) $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
(iii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
(iv) $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Preuve : Immédiate en s'aidant de la forme trigonométrique$\square$

Exemple : $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$
Calculer zz', $\dfrac{z}{z'}$ et $\dfrac{1}{z}$

$zz' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 6e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \dfrac{2}{3}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Propriété : Soit θ une nombre réel. On a :
$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve : On a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, d'où le résultat par somme et différence.$\square$

Application : Linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^4\theta$

Résolution : On a :

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}+3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

3 Applications

3.1 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Définition : Soit a, b et c trois réels, a non nul. On appelle équation du second dégré à coefficients réels toute équation du type $az^2+bz+c=0$, où z est l'inconnue.

Remarque : On sait déjà résoudre une telle équation dans $\mathbb{R}$.

Définition : Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$, c'est trouver tous les nombres complexes qui rendent l'égalité vraie. Un tel nombre est appelé solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation.

Résolution :
On a : $az^2+bz+c = a\left(z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

On pose $\Delta = b^2-4ac$, que l'on appelle discriminant de $az^2+bz+c=0$. Ce discriminant est réel puisque a, b et c sont trois réels.

D'où : $az^2+bz+c = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

– Si $\Delta > 0$, alors $az^2+bz+c = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ et l'équation $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

– Si $\Delta = 0$, alors $az^2+bz+c = a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et l'équation $az^2+bz+c=0$ admet une solution réelle double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$, on a : $\Delta = i^2(-\Delta)$. Alors : $az^2+bz+c = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{i^2(-\Delta)}{4a^2}\right)$, d'où :
$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right)$ et donc l'équation $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
On remarque que : $z_2 = \overline{z_1}$.

Ainsi dans $\mathbb{C}$, az^2+bz+c se factorise toujours.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-4z+13=0$

Résolution : Le discriminant de $z^2-4z+13=0$ est : $\Delta = 16-4\times 13 = -36 < 0$, donc l'équation : $z^2-4z+13=0$ admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{4-i\sqrt{36}}{2} = 2-3i$ et $z_2 = 2+3i$.

3.2 Ensemble de points

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = r$, où $a\in\mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$ est un cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.

Preuve :$|z-a| = r$ équivaut à $AM = r$ ou encore à M appartient au cercle de centre A de rayon r.

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = |z-b|$, où $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$ est la médiatrice de [AB]

Preuve :$|z-a| = r$ équivaut à $AM = BM$ ou encore à M appartient à la médiatrice de [AB].

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z-a) = \theta$, où $a\in\mathbb{C}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ est la demi-droite d'origine A (A non inclus) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$, tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = \theta[2\pi]$

Preuve : $\arg(z-a) = \theta$ équivaut à $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}\right) = \theta[2\pi]$ ou encore à M appartient à la demi-droite passant par A, dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$, tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = \theta[2\pi]$.

Propriété : L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, où $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$ et $z\neq a$ et $z\neq b$ est un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

Preuve : $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ équivaut à $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou encore à M appartient au demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

3.3 Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$

3.3.1 Où $z' = z+b$, avec $b\in\mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z+b$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

Preuve :On a : $z'-z = b$ ce qui équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ ce qui équivaut à M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

3.3.2 Où $z'-\omega = k(z-\omega)$ avec $k\in\mathbb{R}^*$, $\omega\in\mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'-\omega = k(z-\omega)$ avec $k\in\mathbb{R}^*$, $\omega\in\mathbb{C}$ est une homothétie de rapport k , de centre Ω, d'affixe ω.

Preuve : On a : $z'-\omega = k(z-\omega)$ ce qui équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ ce qui équivaut à M' est l'image de M par l'homothétie de rapport k , de centre Ω.

3.3.3 Où $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$

Théorème : La transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ est une rotation de centre Ω, d'affixe ω et d'angle θ.

Preuve : On a : $|z' - \omega| = |e^{i\theta}(z - \omega)| = |z - \omega|$ ce qui équivaut à $\Omega M' = \Omega M$.
De plus pour $z \neq \omega$, on a : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$, d'où : $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg e^{i\theta} = \theta[2\pi]$

X.O.B. 2010