
CHAPITRE 04 FONCTION EXPONENTIELLE. EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

1 Vers une nouvelle fonction

Approche historique : problème de la radioactivité puis problème de Leibniz

Résolution via la méthode d'Euler

Théorème-Définition : Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle, elle est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$

On va d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme fondamental : Soit f une fonction définie et dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Alors pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) > 0$

Preuve du lemme : Soit $\phi : x \mapsto f(x)f(-x)$.

ϕ est définie et dérivable sur \mathbb{R} . On a : $\phi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.

Donc la fonction ϕ est constante. Soit k cette constante. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = k$. En particulier, $\phi(0) = (f(0))^2 = 1$, d'où : $k = 1$.

Donc $f(-x)f(x) = 1$ et donc f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < 0$.

Comme f est continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c compris :

- entre 0 et x_0 si $x_0 > 0$
- entre x_0 et 0 si $x_0 < 0$

tel que $f(c) = 0$. Ce qui amène dans tous les cas à une contradiction, f ne s'annulant pas.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$.

Preuve du théorème : On admet l'existence.

Prouvons l'unicité. Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_1(0) = 1$ et $f_2'(x) = f_2(x)$ et $f_2(0) = 1$.

D'après le lemme, ces deux fonctions ne s'annulent pas pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose : $\psi : x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. ψ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} et ne s'annulant pas sur \mathbb{R} .

On a : $\psi'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \frac{f_1(x)f_2(x) - f_2(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = 0$, donc ψ est une constante, notée λ . Or, $\psi(0) = 1$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\psi(x) = 1$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f_1(x) = f_2(x)$.

D'où l'unicité.

Remarque : On a prouvé au passage grâce au lemme que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $\exp(x) > 0$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Théorème : Pour tous réels a et b , on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Preuve : Comme la fonction \exp ne s'annule pas, on pose pour $x \in \mathbb{R}$: $\nu(x) = \frac{f(x+a)}{f(a)}$, avec $f = \exp$. ν est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$\nu'(x) = \frac{f'(x+a)}{f(a)} = \frac{f(x+a)}{f(a)} = \nu(x)$. De plus : $\nu(0) = 1$. Donc, d'après le premier théorème on a $\nu = \exp$

D'où pour $x \in \mathbb{R}$: $\frac{f(x+a)}{f(a)} = \exp(x)$ et donc $\exp(x+a) = \exp(a)\exp(x)$ et la relation du théorème en remplaçant x par b .

Propriété : Pour tous réels a et b , on a : $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Preuve : $\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp a \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Propriété : Pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Preuve : On va tout d'abord établir le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On note \mathcal{P}_n la proposition $\exp(na) = (\exp(a))^n$.
 Pour $n = 0$, $\exp(0 \times a) = 1$ et $(\exp(a))^0 = 1$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

On suppose que \mathcal{P}_n est vraie.

Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est encore vraie. On a :

$$\exp((n + 1)a) = \exp(na + a) = \exp(na) \exp(a) = (\exp(a))^n \times \exp(a) = (\exp(a))^{n+1}.$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n est vraie.

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on pose $n' = -n$. $n' \in \mathbb{N}$.

$$\exp(na) = \exp(-n'a) = \frac{1}{\exp(n'a)} = \frac{1}{(\exp(a))^{n'}} = (\exp(a))^{-n'} = (\exp(a))^n \text{ et donc } \mathcal{P}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{Z}. \square$$

Nouvelle notation : On note e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre s'appelle le nombre d'Euler. On retiendra que c'est un nombre irrationnel et que l'on a $e \approx 2,718$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.

Par extension à \mathbb{R} , on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$.

Ainsi on peut réécrire les propriétés de l'exponentielle avec cette nouvelle notation :

Résumé :

$$- e^0 = 1, \quad - e^1 = e, \quad - e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pour tous réels a et b , on a :

$$- e^{a+b} = e^a e^b, \quad - e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad - e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad - \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, e^{na} = (e^a)^n$$

2 Etude de la fonction exponentielle

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

Preuve : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp' x = \exp x$ et $\exp x > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Corollaire : Soit a et b deux réels.

- (i) $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$
- (ii) $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

Preuve : (i) C'est une traduction de la stricte croissance

(ii) Si $a = b$, alors $e^a = e^b$, par traduction de la stricte croissance.

En partant de $e^a = e^b$,

- si on suppose que $a < b$, alors $e^a < e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction

- si on suppose que $a > b$, alors $e^a > e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction

donc $a = b$.

Conséquence : $e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.

Propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Preuve : On pose $g(x) = e^x - x$. g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = e^x - 1$ et donc $g'(x) \geq 0$ ssi $e^x \geq 1$ ssi $x \geq 0$.
 Donc pour $x \geq 0$, g est croissante et donc $g(x) \geq g(0)$ pour $x \geq 0$, ou encore $g(x) \geq 1 > 0$. Donc pour $x \geq 0$, on a $e^x > x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

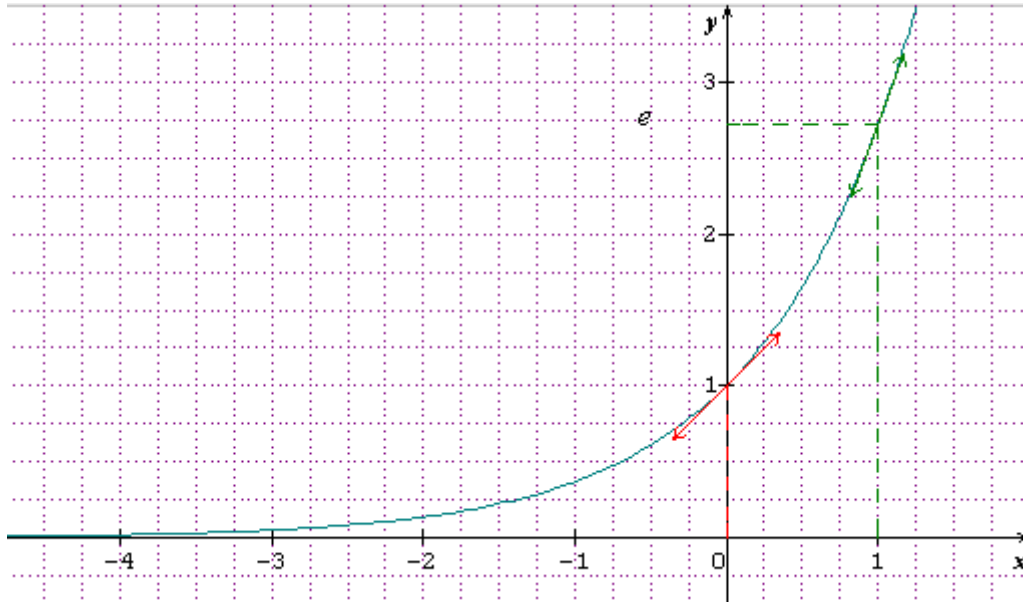
On pose $X = -x$. On a $e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = +\infty$ et par suite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^X} = 0$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Tableau de variation :

	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$	$+$	1	$+$
Variations de \exp	0	1	$+\infty$

Courbe représentative de $x \mapsto e^x$:



Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et $(\exp \circ u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Preuve : On applique le théorème sur la dérivation des fonctions composées.

Propriété :

$$- \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad - \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad - \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve : (i) On pose : $\phi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. ϕ est définie et dérivable sur \mathbb{R} . On a : $\phi'(x) = e^x - x$. On sait que pour $x \geq 0$, $e^x > x$, d'où : $\phi'(x) > 0$ pour $x \geq 0$ et donc ϕ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

D'où pour $x > 0$: $\phi(x) > \phi(0) = 1 > 0$ et donc : $e^x > \frac{x^2}{2}$, ce qui équivaut encore à $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Donc comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

(ii) On pose $X = -x$. On a : $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\frac{e^X}{X}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et par suite $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

(iii) $f : x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et donc en particulier en 0.

Donc le taux de variation en 0, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$ admet une limite en 0, correspondant au nombre dérivé en 0.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$.

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto e^h$:

Pour h voisin de 0, on a : $e^h = 1 + h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Preuve : Pour $h \neq 0$, on pose $\epsilon(h) = \frac{e^h - 1}{h} - 1$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

D'où pour h proche de 0, $e^h - 1 = h + h\epsilon(h)$ ou encore : $e^h = 1 + h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

3 Equations différentielles

On a vu une première équation différentielle : $y' = y$.

On va maintenant s'intéresser à des équations différentielles du type : $y' = ay$ puis du type $y' = ay + b$.

3.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle $y' = ay$, où $a \in \mathbb{R}$, admet pour solution sur \mathbb{R} les fonctions définies sur \mathbb{R} du type $x \mapsto \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : Existence : Soit $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . On a pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \lambda a e^{ax} = a f(x)$. Donc f est solution de $y' = ay$.

Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation $y' = ay$. On va montrer qu'elle est de la forme précédente.

On note $h(x) = g(x)e^{-ax}$. h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = 0$, donc h est constante sur \mathbb{R} . Soit ν cette constante. On a : $g(x)e^{-ax} = \nu$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, : $g(x) = \nu e^{ax}$. \square

Exemple : Résoudre l'équation : $3y' + 5y = 0$

L'équation équivaut à : $y' = -\frac{5}{3}y$, qui a pour solution : $y = ke^{-\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

3.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}$, admet pour solution sur \mathbb{R} les fonctions définies sur \mathbb{R} du type $x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : Existence : Soit $f : x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . On a pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \lambda a e^{ax} = a \left(\lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \right) + b = a f(x) + b$. Donc f est solution de $y' = ay + b$.

Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation $y' = ay + b$. On va montrer qu'elle est de la forme précédente.

On note $h(x) = g(x) + \frac{b}{a}$. h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = g'(x) = ag(x) + b = a \left(g(x) + \frac{b}{a} \right) = ah(x)$, donc h est solution de l'équation $y' = ay$. Elle est donc de la forme, pour $x \in \mathbb{R} : h(x) = \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où on a pour $x \in \mathbb{R} : g(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$. \square

Exemple : Résoudre l'équation : $3y' + 5y = 2$

L'équation équivaut à : $y' = -\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}$, qui a pour solution : $y = ke^{-\frac{5}{3}x} + \frac{6}{5}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation différentielle $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}$, admet une unique solution f sur \mathbb{R} vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$

Preuve : On a : $f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$.

$f(x_0) = y_0$ ssi $\lambda e^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$ ssi $\lambda = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{-ax_0}$

$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ et donc f est unique. \square

3.3 Lien avec l'équation fonctionnelle

Théorème :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une fonction non nulle, définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

(ii) Il existe un nombre réel k tel que pour tout réel x , on a : $f(x) = e^{kx}$.

Preuve : (i) \implies (ii) Soit f une fonction non nulle, définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

On a en particulier : $f(x + 0) = f(x)f(0)$, donc $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $g(x) = f(a + x)$.

g est dérivable car f l'est.

On a : $g'(x) = f'(a + x)$. Or $g(x) = f(a)f(x)$, d'où aussi $g'(x) = f'(x)f(a)$, et donc $f'(a + x) = f'(x)f(a)$.

En particulier pour $x = 0$, on a : $f'(a) = f'(0)f(a)$. En notant $k = f'(0)$, on a pour $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = kf(a)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ky$

Donc d'après ce qui précède, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \lambda e^{kx}$. Comme $f(0) = 1$, on a : $\lambda = 1$ et donc $f(x) = e^{kx}$.

(ii) \implies (i) On a déjà montré que : $e^{k(x+y)} = e^{kx}e^{ky}$ et que donc (i) est vraie.