
 CHAPITRE 03 DÉRIVATION.

1 Nombre dérivé (Rappels de 1S)

1.1 Nombre dérivé

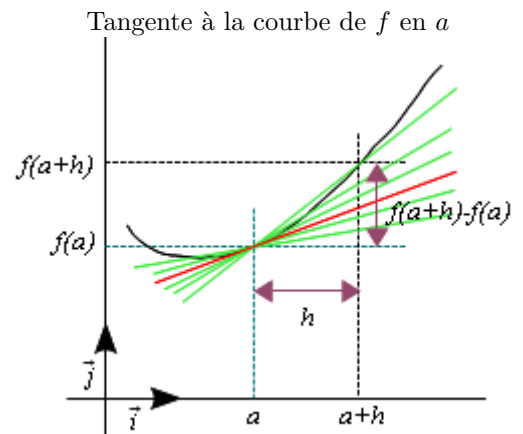
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I , qui ne soit pas une borne. Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a . On appelle alors nombre dérivé en a la valeur de la limite de ce taux d'accroissement, que l'on note $f'(a)$. Autrement dit, si f est dérivable en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Définition : Avec les mêmes hypothèses, l'ensemble des nombres a pour lesquels $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, est appelé domaine de dérivabilité de f .

1.2 Tangente en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I tel que f soit dérivable en a . On appelle tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété : La tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.



1.3 Approximation affine

Propriété-Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors il existe une fonction ϕ telle que pour tout réel h tel que $a+h \in I$, on a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0$.

On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a .

Autrement dit pour x proche de a : $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$

Preuve : Voir cours de 1S.

2 Dérivée et sens de variation (Rappels de 1S)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit D le domaine de dérivabilité de f .

Définition : La fonction, notée f' , qui à tout $x \in D$, associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de f sur D .

Théorème :

Soit un intervalle J inclus dans D .

Si f est croissante sur J , alors pour tout $x \in J$, $f'(x) \geq 0$.

Si f est décroissante sur J , alors pour tout $x \in J$, $f'(x) \leq 0$.

Si f est constante sur J , alors pour tout $x \in J$, $f'(x) = 0$.

Preuve : Voir cours de 1S.

Théorème réciproque (admis) (principe de Lagrange) :

Soit un intervalle J inclus dans D .

Si pour $x \in J$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur J .

Si pour $x \in J$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur J .

Si pour $x \in J$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur J .

De plus, si, pour $x \in J$, $f'(x) > 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur J .

De plus, si, pour $x \in J$, $f'(x) < 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur J .

Notion d'extremum local :

Définition :

Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.

On dit que $f(a)$ est un minimum local (respectivement un maximum local) de la fonction f sur I , lorsque $f(a)$ est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans I et contenant a .

f admet un extremum local si elle admet un minimum ou un maximum local.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$.

Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Attention! La réciproque est fautive! Par exemple : $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

Théorème réciproque :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 0$.

3 Calcul de dérivées

3.1 Dérivée des fonctions usuelles (Rappels de 1S)

Fonction f	Domaine de définition de f	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$	\mathbf{R}	$f'(x) = 0$	\mathbf{R}
$f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbf{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbf{R}
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbf{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbf{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	\mathbf{R}_+	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbf{R}_+^*
$f(x) = \sin x$	\mathbf{R}	$f'(x) = \cos x$	\mathbf{R}
$f(x) = \cos x$	\mathbf{R}	$f'(x) = -\sin x$	\mathbf{R}

3.2 Opération sur les dérivées

3.2.1 Dérivée d'une somme

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J , de fonctions dérivées u' et v' .

Alors la somme de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(u + v)' = u' + v'$

3.2.2 Dérivée d'une multiplication par un scalaire

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J , de fonctions dérivées u' . Soit k un réel.

Alors la fonction ku est dérivable sur J et on a : $(ku)' = ku'$

3.2.3 Dérivée d'un produit

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J , de fonctions dérivées u' et v' .

Alors le produit de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(uv)' = u'v + v'u$

3.2.4 Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J , avec v ne s'annulant pas sur J , de fonctions dérivées u' et v' .

Alors l'inverse de la fonction v est dérivable et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Alors le quotient de u par v est dérivable sur J et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

3.2.5 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété :

Soit v une fonction dérivable sur J , de fonction dérivée v' .

Soit u une fonction dérivable sur I , telle que $u(I) \subset J$, de fonction dérivée u' .

Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a pour $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Preuve : On pose $f = v \circ u$

Soit $a \in I$.

Soit h proche de 0, tel que $a + h \in I$.

Comme u est une fonction dérivable sur I , on a : $u(a + h) = u(a) + hu'(a) + h\epsilon_1(h)$, avec : $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1(h) = 0$

On pose : $b = u(a)$

Soit k proche de 0, tel que : $b + k \in I$

Comme v est dérivable en b , on a : $v(b + k) = v(b) + kv'(b) + k\epsilon_2(k)$, avec : $\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_2(k) = 0$.

On a : $u(a + h) - u(a)$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0, autrement dit $u(a + h) - u(a)$ est aussi proche de 0 que l'on veut. Donc en choisissant h convenablement, on peut remplacer k par $u(a + h) - u(a)$.

On a alors : $v(u(a + h)) = v(u(a)) + (u(a + h) - u(a))v'(u(a)) + (u(a + h) - u(a))\epsilon_2(u(a + h) - u(a))$.

Soit encore : $f(a + h) = f(a) + hu'(a)v'(u(a)) + h(\epsilon_1(h)v'(u(a)) + (u'(a) + \epsilon_1(h))\epsilon_2(hu'(a) + h\epsilon_1(h)))$.

On pose : $\epsilon(h) = \epsilon_1(h)v'(u(a)) + (u'(a) + \epsilon_1(h))\epsilon_2(hu'(a) + h\epsilon_1(h))$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

D'où : $f(a + h) = f(a) + hu'(a)v'(u(a)) + h\epsilon(h)$.

Et donc f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)v'(u(a))$. □

Cas particuliers importants :

Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.

- Alors u^n est dérivable sur I , et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

- Si de plus u ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I , et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$

- Si u est une fonction strictement positive sur I , alors \sqrt{u} est dérivable et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4 Dérivabilité et continuité

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un domaine D . Soit I un intervalle inclus dans D . Soit $a \in I$

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Preuve : Dire que f est dérivable en a , signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

On pose pour $x \neq a$: $\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On a : $f(x) = f(a) + (x - a)\tau(x)$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \tau(x) = f'(a)$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et donc f est continue en a . □

Attention! La réciproque est fautive.

Par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

5 Notation différentielle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in I$.

On a : $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h)$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

On pose : $\Delta x = x + h - x = h$ et $\Delta y = f(x + h) - f(x)$.

On a : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$, avec $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon(\Delta x) = 0$.

Lorsque Δx devient infinitésimal (très petit) la relation précédente s'écrit : $dy = f'(x)dx$. Cette écriture est appelé l'écriture différentielle. On peut aussi écrire : $df = f'(x)dx$

On note souvent en physique : $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Remarque : En utilisant cette notation, on a pour $f = v \circ u$.

On pose $y = u(x)$. On a : $dy = u'(x)dx$

On a : $f(y) = v(y)$. D'où : $df = v'(y)dy$, d'où : $df = v'(u(x))u'(x)dx$.

Ou en physique : $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx}$, soit encore : $\frac{df}{dx}(a) = \frac{dv}{du}(u(a)) \frac{du}{dx}(a)$.

6 Application à l'étude de la fonction tangente

Théorème :

La fonction tangente est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C'est une fonction périodique de période π et impaire.

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Preuve : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x = 0$ pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc \tan est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On a : $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$, donc la fonction tangente est π périodique. On peut donc restreindre l'étude à un intervalle du type $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ou $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[\dots$ La courbe de la fonction tangente sera obtenu par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}^*$ à partir de celle de l'intervalle d'étude.

On choisit un intervalle centré sur 0. On a pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ donc la fonction tangente est impaire. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$. On obtiendra la courbe sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par symétrie centrale par rapport à O.

\tan est continue et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ comme quotient de fonctions continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

On a : $\tan'(x) > 0$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$, donc la fonction \tan est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.

On obtient :

