2.1. Exemples introductifs

Exemple 1 : Une infinité de dominos sont mis côte à côte en partant de la droite de sorte à ce que chaque domino puisse faire tomber le suivant.
Que faut-il faire pour faire tomber les dominos ?

....

....

Qu'arrivera-t-il ensuite ?

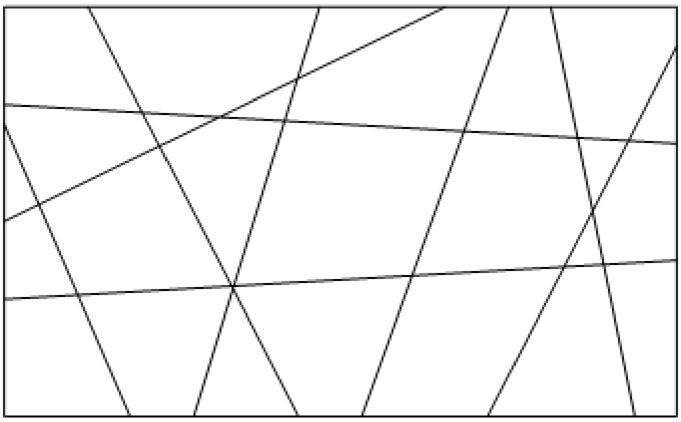
....

....

....

Exemple 2 : (d'après GRAL)

Une carte plane, ayant la forme d'un rectangle, avec des droites délimitant les frontières entre pays, a été dessinée ci-dessous :



1. Colorier cette carte en utilisant deux couleurs différentes de sorte à ce que deux pays voisins (ayant donc une frontière commune le long d'un segment) soient de deux couleurs différentes.
2. Le coloriage ainsi obtenu est-il unique, les couleurs choisies pour le premier coloriage étant conservées ?

....

....

....

3. Le résultat de la question 1 est-il exceptionnel, ou peut-on colorier avec deux couleurs n'importe quel type de carte construite de cette façon ? Expliquer.

....

....

....

....

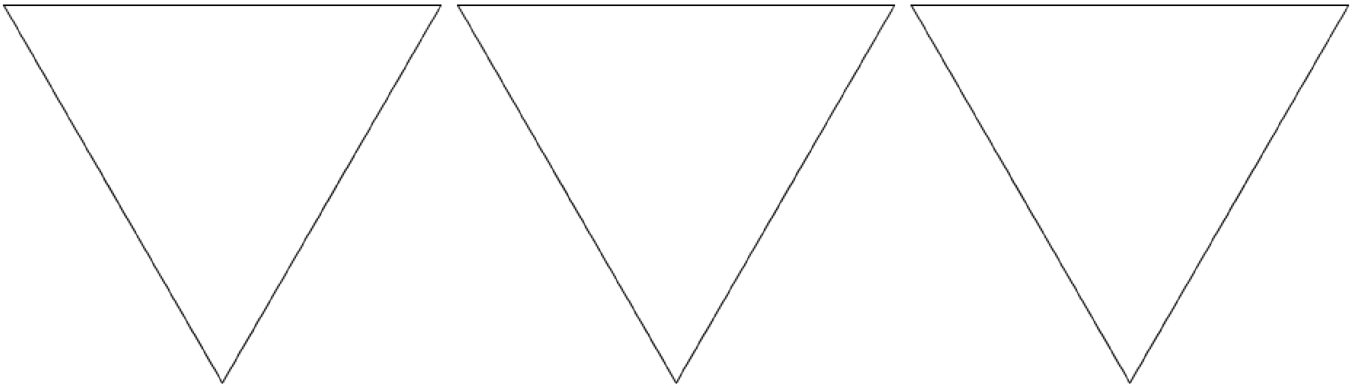
....

....

....

....

Exemple 3 : On partage un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux superposables et on noircit le triangle équilatéral central.
Chaque triangle équilatéral non noirci est à nouveau subdivisé en quatre et on noircit le triangle équilatéral central.
Compléter les dessins ci dessous suivant ce principe :



Étape 0 Étape 1 Étape 2

Déterminer le nombre de nouveaux triangles présents à l'étape n.

....

....

....

....

Exemple 4 :
On part d'un segment (rang 0) et on remplace le tiers central par deux côtés d'un triangle équilatéral (rang 1).
On fait de même pour chaque segment obtenu sur la nouvelle figure (rang 2)

Déterminer le nombre de segments au rang n.

....

....

....

....

Exemple 5 :
On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ avec u_0

1. Calculer les premiers termes de cette suite.

....

....

2. Faire une conjecture sur une expression de u_n en fonction de n .

....

....

3. Montrer que si u_n s'écrit sous la forme écrite au 2., alors u_{n+1} s'écrit aussi sous une forme analogue.

....

....

4. Conclure

....

2.2. Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on doit :

Étape 1 : initialiser, c'est à dire montrer que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.

Étape 2 : montrer que la propriété est héréditaire, c'est à dire que pour un entier $n \geqslant n_0$ donné si on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie alors on montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Étape 3 : conclure alors que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple : Prouver par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : ....

Étape 1 : Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour ....

....

....

Étape 2 : Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour ....

Montrons que .... est alors vraie : ....

....

....

....

....

....

Étape 3 : ....

....

Importance de l'initialisation :

Prouver que la « propriété » $\mathcal{P}_n$: « 2^n est un multiple de 3 » est héréditaire.

....

....

....

Est-elle vraie pour autant ?

....

....

Application :

1. Établir par récurrence qu'une suite est bornée

Exemple : Soit la suite de terme général $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et de premier terme $u_0 = 0$.

Montrer que $0 \leqslant u_n < 2$.

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....

2. Étude des variations d'une suite définie implicitement, du type $u_{n+1}=f(u_n)$, u_0 étant donné, avec f croissante, il suffit de comparer les deux premiers termes et par récurrence deux termes consécutifs.

Exemple : Étudier les variations de la suite de terme général : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et de premier terme $u_0 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Des sujets de bac

90, 92, 93 Annales Bac 2010