Echantillonnage et estimation

Terminale S

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

1. Lois normales
   - 1.1 Approximation de la loi binomiale
   - 1.2 Loi normale centrée réduite
   - 1.3 Loi normale
2. Echantillonnage et estimation
   - 2.1 Echantillonnage
   - 2.2 Estimation

Plan du cours

1. Lois normales
   - 1.1 Approximation de la loi binomiale
   - 1.2 Loi normale centrée réduite
   - 1.3 Loi normale
2. Echantillonnage et estimation
   - 2.1 Echantillonnage
   - 2.2 Estimation

Plan du cours

1. Lois normales
   - 1.1 Approximation de la loi binomiale
   - 1.2 Loi normale centrée réduite
   - 1.3 Loi normale
2. Echantillonnage et estimation
   - 2.1 Echantillonnage
   - 2.2 Estimation

Propriété Définition

Soit X *une variable aléatoire définie sur un univers* Ω. *Soit* μ *son espérance et* σ *son écart-type.*

On appelle variable aléatoire centrée réduite la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

Z *a pour espérance 0 et pour écart-type 1.*

Propriété Définition

Soit X *une variable aléatoire définie sur un univers* Ω*. Soit* μ *son espérance et* σ *son écart-type.*
On appelle variable aléatoire centrée réduite la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.
Z *a pour espérance 0 et pour écart-type 1.*

Théorème

Théorème de Moivre-Laplace (admis) :
Soit n *un entier naturel non nul et* p *un nombre réel compris strictement entre 0 et 1.*
Soit X_n *une variable aléatoire suivant la loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$.
On note Z_n *la variable aléatoire centrée réduite associée à* X_n.
Alors pour tous réels a *et* b *tels que :* $a < b$, $P(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ *tend quand* n *tend vers* $+\infty$ *vers* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Remarques

(i) $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Remarques

(i) $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

(ii) On considère que la limite dans le théorème de Moivre-Laplace est pratiquement atteinte dès que l'on a simultanément : $n \geqslant 30$ *;* $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*. Cette approximation sera d'autant meilleur que* n *est grand.*

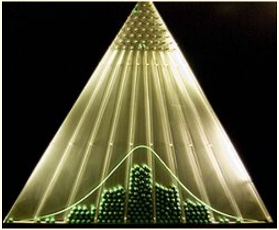


Planche de Galton, qui illustre le théorème de Moivre-Laplace (source Wikipédia)

Plan du cours

1 Lois normales
1.1 Approximation de la loi binomiale
1.2 Loi normale centrée réduite
1.3 Loi normale

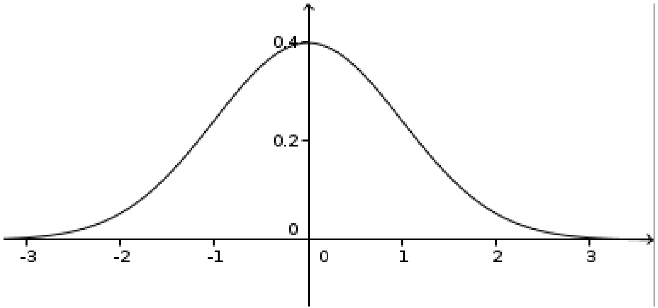
2 Echantillonnage et estimation
2.1 Echantillonnage
2.2 Estimation

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, *est la loi de densité la fonction* f *définie par :* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$*, est la loi de densité la fonction* f *définie par :* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.



Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$

Remarques

(iii) Si X suit la loi normale centrée réduite, alors

$E(X) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 tf(t)dt + \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t)dt$. *Or*

$\int_0^x tf(t)dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$. *D'où :*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *De même,*

$\int_x^0 tf(t)dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right)$ *et donc :*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 tf(t)dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, *d'où :* $E(X) = 0$.

Remarques

(iii) Si X suit la loi normale centrée réduite, alors

$E(X) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t) dt$. *Or*

$\int_0^x t f(t) dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. *D'où :*

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *De même,*

$\int_x^0 t f(t) dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right)$ *et donc :*

$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, *d'où :* $E(X) = 0$.

(iv) (Admis) Si X suit la loi normale centrée réduite, alors $\sigma(X) = 1$.

Définition

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Soit un réel $\alpha \in]0\,;\,1[$.
Alors il existe un unique réel positif u_α tel que :
$P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Définition

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit un réel $\alpha \in]0\,;\,1[$.
Alors il existe un unique réel positif u_α tel que :
$P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Preuve

La fonction : $F\ :\ x \mapsto \int\limits_0^x f(t)dt$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$. C'est l'unique primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 0. On a pour $t \in [0;+\infty[$, $f(t) > 0$. La fonction F est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Preuve

Comme la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que l'aire sous la courbe vaut $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$, *on a :* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{2}$. *De plus* $F(0) = 0$.

Pour $0 < \alpha < 1$, *on a :* $0 < 1 - \alpha < 1$ *et donc* $0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.

Preuve

Comme la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que l'aire sous la courbe vaut $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$, *on a :* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{2}$. *De plus* $F(0) = 0$.

Pour $0 < \alpha < 1$, *on a :* $0 < 1 - \alpha < 1$ *et donc* $0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.

Par suite, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique nombre positif tel que $F(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Preuve

Comme la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ *est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que l'aire sous la courbe vaut* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$*, on a :* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{2}$*. De plus* $F(0) = 0$*.*

Pour $0 < \alpha < 1$*, on a :* $0 < 1 - \alpha < 1$ *et donc* $0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}$*.*

Par suite, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique nombre positif tel que $F\left(u_\alpha\right) = \frac{1-\alpha}{2}$*.*

Comme $P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = \int\limits_{-u_\alpha}^{u_\alpha} f(t)dt = 2\int\limits_{0}^{u_\alpha} f(t)dt$*, car* f *est paire. Donc* $P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$*.*$\square$

Cas particuliers

(i) $u_{0,05} \approx 1,96$

Cas particuliers

(i) $u_{0,05} \approx 1,96$
(ii) $u_{0,01} \approx 2,58$

Cas particuliers

(i) $u_{0,05} \approx 1,96$
(ii) $u_{0,01} \approx 2,58$

Remarque

On peut reformuler le théorème de Moivre-Laplace en disant que Z_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. Autrement dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Plan du cours

1 Lois normales
1.1 Approximation de la loi binomiale
1.2 Loi normale centrée réduite
1.3 Loi normale

2 Echantillonnage et estimation
2.1 Echantillonnage
2.2 Estimation

Définition

Soit μ et σ deux nombres réels avec $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X d'univers $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si la variable centrée réduite associée suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

(ii) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, donc la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
(iii) σ a une influence sur la forme de la courbe : plus σ est petit, plus les valeurs sont resserrées autour de μ et plus la "cloche" est haute.

Définition

Soit μ et σ deux nombres réels avec $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X d'univers $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si la variable centrée réduite associée suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ est la fonction f telle que
$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Définition

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X *d'univers* $\mathbb{R}$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *si la variable centrée réduite associée suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *est la fonction* f *telle que*

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

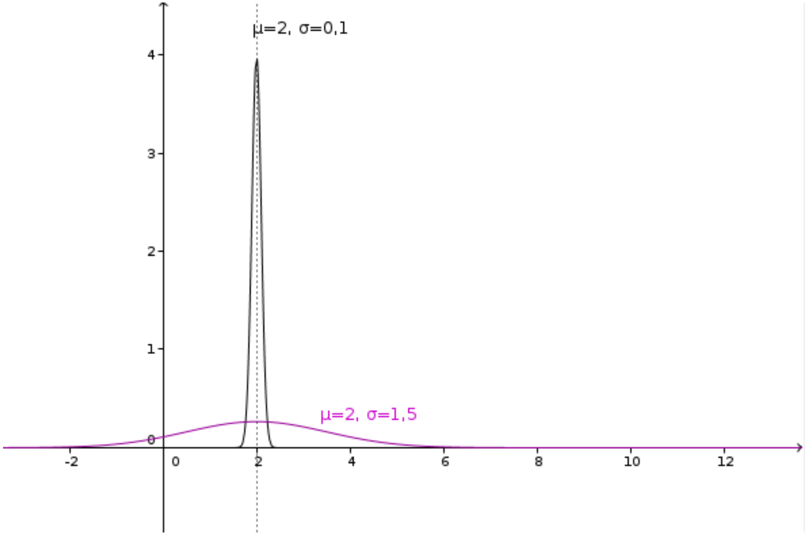
(ii) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, *donc la courbe de* f *est symétrique par rapport à la droite d'équation* $x = \mu$.

Définition

Soit μ et σ deux nombres réels avec $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X d'univers $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si la variable centrée réduite associée suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ est la fonction f telle que
$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
(ii) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, donc la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
(iii) σ a une influence sur la forme de la courbe : plus σ est petit, plus les valeurs sont resserrées autour de μ et plus la "cloche" est haute.



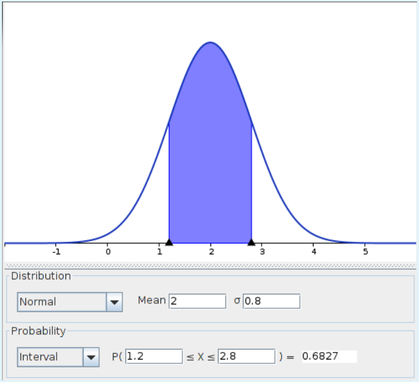
μ=2, σ=0,1
μ=2, σ=1,5
4
3
2
1
0
-2
0
2
4
6
8
10
12

Propriété

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$*.*
Soit X *une variable aléatoire d'univers* $\mathbb{R}$ *suivant la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$*.*
Alors : $P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]\right) \approx 0,683$

Propriété

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$.
Soit X *une variable aléatoire d'univers* $\mathbb{R}$ *suivant la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$.
Alors : $P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]\right) \approx 0,683$

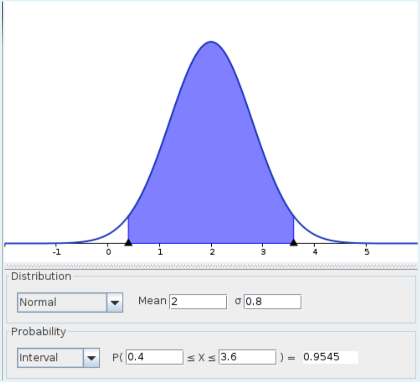


Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma]\right) \approx 0,954$$

Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]\right) \approx 0,954$$

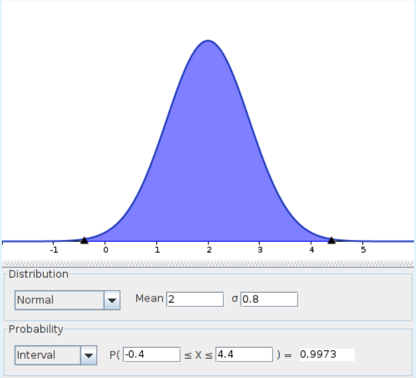


Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]\right) \approx 0,997$$

Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]\right) \approx 0,997$$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.*

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

Savoir

Calcul d'une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$P(1 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,819$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

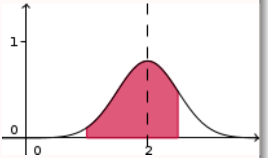
(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$P(1 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,819$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

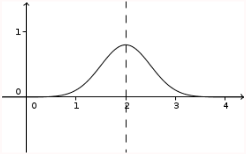
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

2. *Problème :* *la calculatrice ne sait calculer que :* $P(a \leqslant X \leqslant b)$.



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

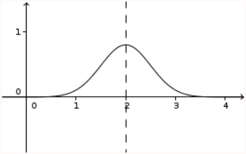
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

2. <u>Problème :</u> la calculatrice ne sait calculer que : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

<u>Résolution :</u> cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calcul er une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

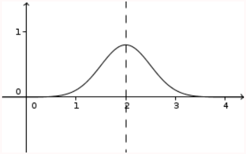
Résolution :

2. *Problème :* *la calculatrice ne sait calculer que :* $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Résolution : *cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(1,3 \leqslant X) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + P(X > 2) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

2. *Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.*

Résolution : cf figure animée

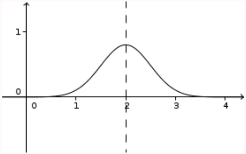
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(1,3 \leqslant X) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + P(X > 2) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + 0,5$

A la calculatrice :

$P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,419$, d'où :

$P(1,3 \leqslant X) \approx 0,419 + 0,5 \approx 0,919$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

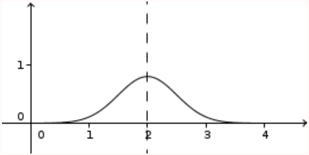
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

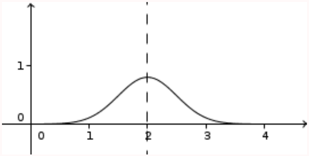
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

3. <u>Résolution :</u> cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

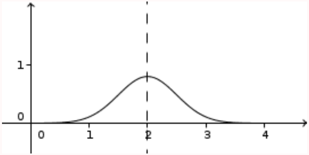
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. *Résolution : cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X < 1,2) = P(X > 2) - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) = 0,5 - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2)$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. *Résolution : cf figure animée*

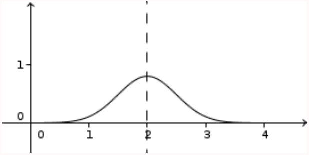
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X < 1,2) = P(X > 2) - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) = 0,5 - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2)$

A la calculatrice :

$P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,445$,

d'où : $P(X < 1,2) \approx 0,5 - 0,445 \approx 0,055$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

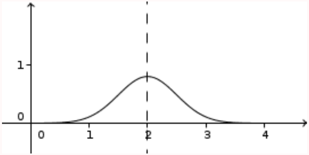
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

4. <u>Résolution :</u> cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

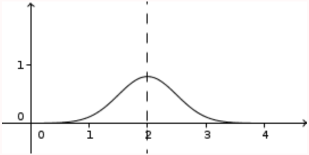
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. *Résolution :* cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

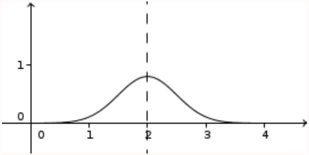
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. *Résolution : cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > 2,5) = P(X \geqslant 2) - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) = 0,5 - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5)$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

4. <u>Résolution :</u> cf figure animée

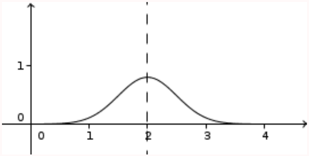
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > 2,5) = P(X \geqslant 2) - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) = 0,5 - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5)$

A la calculatrice :

$P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,341$,

d'où : $P(X > 2,5) \approx 0,5 - 0,341 \approx 0,159$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2;0,25)$*.*

Trouver a *tel que :*

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a *tel que :*

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer* $P(X < a)$ *pour X suivant* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$</u>

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a *tel que :*

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

<u>*Résolution :*</u>

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ *pour X suivant* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ InvNormCD(P, σ, μ)

TI$\rightarrow$ FracNormale(P, μ, σ)

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.*

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$
(ii) Casio $\to$ InvNormCD(P, σ, μ)
TI$\to$ FracNormale(P, μ, σ)
On trouve dans les deux cas :
$a \approx 2,421$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

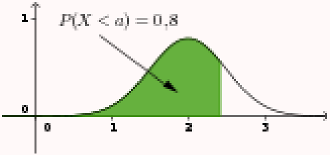
(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ InvNormCD(P, σ, μ)

TI$\rightarrow$ FracNormale(P, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$a \approx 2,421$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

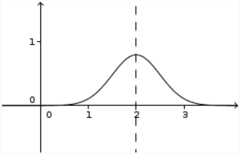
Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

<u>*Résolution :*</u>

2. <u>*Problème :*</u> *la calculatrice ne sait calculer que :* $P(X < b)$.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

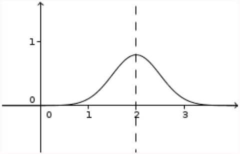
1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.

Résolution : cf figure animée

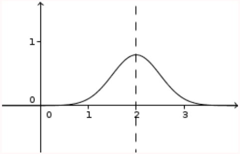
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > a) = 1 - P(X < a)$*, d'où :*

$P(X < a) = 1 - P(X > a) =$

$1 - 0,7 = 0,3$

On est ramené au cas précédent.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

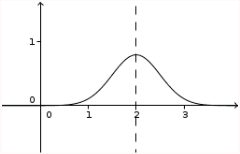
(ii) $P(X > a) = 1 - P(X < a)$, *d'où :*

$P(X < a) = 1 - P(X > a) =$

$1 - 0,7 = 0,3$

On est ramené au cas précédent.

A la calculatrice : $a \approx 1,738$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

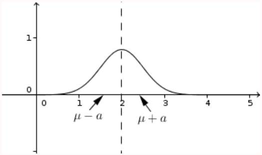
Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

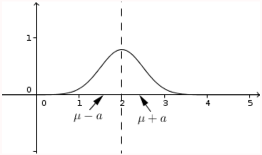
1. $P(X < a) = 0,8$

2. $P(X > a) = 0,7$

3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$</u>

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a *tel que :*

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

3. <u>*Résolution :*</u> *cf figure animée*

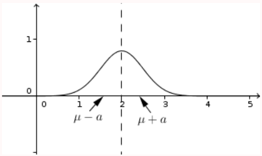
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(\mu - a < X < \mu + a) =$
$2 \times P(\mu < X < \mu + a)$

D'où: $P(\mu < X < \mu + a) =$
$0,6 \div 2 = 0,3$

Or $P(X < \mu + a) =$
$0,5 + P(\mu < X < \mu + a) = 0,8$

et l'on se ramène au cas 1.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

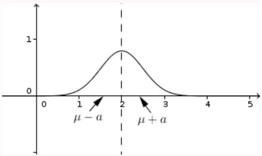
(ii) $P(\mu - a < X < \mu + a) =$
$2 \times P(\mu < X < \mu + a)$

D'où: $P(\mu < X < \mu + a) =$
$0,6 \div 2 = 0,3$

Or $P(X < \mu + a) =$
$0,5 + P(\mu < X < \mu + a) = 0,8$

et l'on se ramène au cas 1.

A la calculatrice : $\mu + a \approx 2,421$*,*
d'où :$a \approx 0,421$



Plan du cours

1 Lois normales
1.1 Approximation de la loi binomiale
1.2 Loi normale centrée réduite
1.3 Loi normale

2 Echantillonnage et estimation
2.1 Echantillonnage
2.2 Estimation

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

★ Proportion p de boules rouges connue.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges <u>connue</u>.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation
=> paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.
✦ Domaine de l'estimation et de l'intervalle de confiance

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation
=> paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.
✦ Domaine de l'estimation et de l'intervalle de confiance
=>paragraphe 2

Plan du cours

1. Lois normales
   - 1.1 Approximation de la loi binomiale
   - 1.2 Loi normale centrée réduite
   - 1.3 Loi normale
2. Echantillonnage et estimation
   - 2.1 Echantillonnage
   - 2.2 Estimation

Théorème Définition

Soit X_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *et un réel* $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Théorème Définition

Soit X_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$ *et un réel* $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Soit Z *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*

On note u_α *l'unique réel tel que :* $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Théorème Définition

Soit X_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *et un réel* $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Soit Z *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*

On note u_α *l'unique réel tel que :* $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

On note $I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

Théorème Définition

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et un réel $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

On note u_α l'unique réel tel que : $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

On note $I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.

On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$ *la fréquence de succès.*

Théorème Définition

Soit X_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *et un réel* $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Soit Z *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*

On note u_α *l'unique réel tel que :* $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

On note $I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ *la fréquence de succès.*

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(F_n \in I_n\right) = 1-\alpha$.

Théorème Définition

Soit X_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *et un réel* $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Soit Z *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*

On note u_α *l'unique réel tel que :* $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

On note $I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ *la fréquence de succès.*

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(F_n \in I_n\right) = 1-\alpha$.

I_n *est appelé un intervalle de fluctuation asymptotique de* F_n *avec la probabilité* $1-\alpha$.

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} + np \leqslant X_n \leqslant b\sqrt{np(1-p)} + np$$

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} + np \leqslant X_n \leqslant b\sqrt{np(1-p)} + np$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p \leqslant F_n \leqslant b\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p$$

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} + np \leqslant X_n \leqslant b\sqrt{np(1-p)} + np$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p \leqslant F_n \leqslant b\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p$$

Avec $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on a : $-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha \Leftrightarrow F_n \in I_n$.

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} + np \leqslant X_n \leqslant b\sqrt{np(1-p)} + np$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p \leqslant F_n \leqslant b\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p$$

Avec $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on a : $-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha \Leftrightarrow F_n \in I_n$.
Et donc $P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P(F_n \in I_n)$.

Preuve

D'après le théorème de Moivre Laplace, en notant Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ *où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.*

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)}$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} + np \leqslant X_n \leqslant b\sqrt{np(1-p)} + np$$
$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p \leqslant F_n \leqslant b\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + p$$

Avec $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on a : $-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha \Leftrightarrow F_n \in I_n$.
Et donc $P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P(F_n \in I_n)$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Application

Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$, *l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour une variable aléatoire* X_n *suivant la loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *est l'intervalle :*

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Application

Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Preuve

$u_{0,05} \approx 1,96$.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.
Soit F_n la fréquence dans un échantillon de taille n.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.
Soit F_n la fréquence dans un échantillon de taille n.
Si I_n est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Soit F_n la fréquence dans un échantillon de taille n.

Si I_n est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :

- si $F_n \in I_n$: on accepte l'hypothèse au seuil de risque de 5%.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.
Soit F_n la fréquence dans un échantillon de taille n.
Si I_n est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :
- si $F_n \in I_n$: on accepte l'hypothèse au seuil de risque de 5%.
- si $F_n \notin I_n$: on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut p au seuil de risque de 5 %.

Plan du cours

1. Lois normales
   - 1.1 Approximation de la loi binomiale
   - 1.2 Loi normale centrée réduite
   - 1.3 Loi normale

2. Echantillonnage et estimation
   - 2.1 Echantillonnage
   - 2.2 Estimation

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.
Soit F_n la variable aléatoire donnant la fréquence de succès.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
F_n peut-être considéré comme un estimateur de p. Jusqu'à quel point est-ce fiable ? Quelle est la marge d'erreur ?

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.
Soit F_n la variable aléatoire donnant la fréquence de succès.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
F_n peut-être considéré comme un estimateur de p. Jusqu'à quel point est-ce fiable ? Quelle est la marge d'erreur ?

Définition

Soit un réel $\alpha \in]0\,;\,1[$.
On appelle intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour l'estimation de p l'intervalle noté I_C tel que : $P\left(p \in I_C\right) \geqslant 1-\alpha$

Propriété

Soit X_n *une variable aléatoire suivant la loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$, *alors pour tout* $p \in]0\,;\,1[$ *il existe un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$,
$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$.

Soit $g\ :\ p \mapsto p(1-p)$ g *est dérivable sur* $[0\,;\,1]$ *et* $g'(p) = 1 - 2p$.
$g'(p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant p$.

Propriété

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors pour tout $p \in]0\,;\,1[$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$P\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Preuve

- Montrons que $K_n = \left[p-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = J_n$. *Cela revient à montrer que* $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ *pour* $p \in [0\,;\,1]$.

Propriété

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors pour tout $p \in]0\,;\,1[$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$P\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Preuve

- Montrons que $K_n=\left[p-2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\,p+2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=J_n$. *Cela revient à montrer que* $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ *pour* $p \in [0\,;\,1]$.

Soit $g\,:\,p \mapsto p(1-p)$ g *est dérivable sur* $[0\,;\,1]$ *et* $g'(p)=1-2p$.

$g'(p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geqslant p$.

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\frac{1}{2}$. $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\dfrac{1}{2}$. $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Et ainsi $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1$.

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\frac{1}{2}$. $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Et ainsi $2\sqrt{p(1-p)}\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$.

- Ainsi, $P\left(F_n\in K_n\right)\leqslant P\left(F_n\in J_n\right)$

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\frac{1}{2}$. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Et ainsi $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$.

- Ainsi, $P\left(F_n \in K_n\right) \leqslant P\left(F_n \in J_n\right)$

- Or d'après le théorème de Moivre-Laplace appliqué pour $u_\alpha = 2$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in K_n) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 1-\alpha$, *avec* Z *suivant la loi normale centrée réduite.*

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\frac{1}{2}$. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Et ainsi $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$.

- Ainsi, $P\left(F_n \in K_n\right) \leqslant P\left(F_n \in J_n\right)$

- Or d'après le théorème de Moivre-Laplace appliqué pour $u_\alpha = 2$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in K_n) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 1-\alpha$, *avec* Z *suivant la loi normale centrée réduite.*

Or, à l'aide d'une calculatrice, on trouve : $1-\alpha \approx 0,954$.

Preuve

Et donc g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Donc sur $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\dfrac{1}{2}$. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Et ainsi $2\sqrt{p(1-p)} \leqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1$.

- Ainsi, $P\left(F_n \in K_n\right) \leqslant P\left(F_n \in J_n\right)$

- Or d'après le théorème de Moivre-Laplace appliqué pour $u_\alpha = 2$, *on a :* $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in K_n) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 1 - \alpha$, *avec* Z *suivant la loi normale centrée réduite.*

Or, à l'aide d'une calculatrice, on trouve : $1 - \alpha \approx 0,954$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in K_n) \approx 0,954$ *et donc il existe bien* n_0 *tel que* $P(F_n \in K_n) \in [0,954 - 0,002\,;\,0,954 + 0,002]$ *et donc* $P(F_n \in K_n) > 0,95$ *et donc* $0,95 < P\left(F_n \in J_n\right)$.

Propriété

Lorsque n est assez grand (c.à.d. pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), l'intervalle $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de p. I_C est appelé intervalle de confiance pour p au niveau asymptotique 95%.

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C$.

$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P(p \in I_C) > 0,95$. $\square$

Propriété

Lorsque n *est assez grand (c.à.d. pour* $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*), l'intervalle* $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de* p. I_C *est appelé intervalle de confiance pour* p *au niveau asymptotique* 95%.

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *:*

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Propriété

Lorsque n est assez grand (c.à.d. pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), l'intervalle $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de p. I_C est appelé intervalle de confiance pour p au niveau asymptotique 95%.

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$:

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C$.

Propriété

Lorsque n *est assez grand (c.à.d. pour* $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*), l'intervalle* $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de* p*.* I_C *est appelé intervalle de confiance pour* p *au niveau asymptotique* 95%*.*

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *:*

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C$.

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P(p \in I_C) > 0,95. \ \square$$