Logarithme népérien

Terminale S

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

1. Vers une nouvelle fonction
   1.1 Bijection. Fonction réciproque
   1.2 Une nouvelle fonction
2. Etude de la fonction logarithme népérien
3. La fonction logarithme décimal

Plan du cours

1. Vers une nouvelle fonction
   - 1.1 Bijection. Fonction réciproque
   - 1.2 Une nouvelle fonction
2. Etude de la fonction logarithme népérien
3. La fonction logarithme décimal

Plan du cours

1 Vers une nouvelle fonction
1.1 Bijection. Fonction réciproque
1.2 Une nouvelle fonction

2 Etude de la fonction logarithme népérien

3 La fonction logarithme décimal

Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
1. pour tout réel x de I, son image par f, $f(x)$ est dans J ;
2. pour tout réel y de J, il existe un unique x dans I antécédent de y par f.

Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
1. pour tout réel x de I, son image par f, $f(x)$ est dans J ;
2. pour tout réel y de J, il existe un unique x dans I antécédent de y par f.

Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit une bijection f de I sur J.
On appelle fonction réciproque de f, la fonction notée g qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f (autrement dit $f(x) = y$). Autrement dit $g(y) = x$.

Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
1. pour tout réel x de I, son image par f, $f(x)$ est dans J ;
2. pour tout réel y de J, il existe un unique x dans I antécédent de y par f.

Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit une bijection f de I sur J.
On appelle fonction réciproque de f, la fonction notée g qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f (autrement dit $f(x) = y$). Autrement dit $g(y) = x$.

Remarque

Avec les mêmes notations, on a : $g(y) = x$ ssi $f(x) = y$

Théorème

Théorème de la bijection :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I
Si f est continue et strictement monotone, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (où $f(I)$ est l'image de l'intervalle I par f).

Théorème

Théorème de la bijection :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I
Si f est continue et strictement monotone, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (où $f(I)$ est l'image de l'intervalle I par f).

Preuve

Voir le chapître sur la continuité$\square$

Théorème

Théorème de la bijection :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I
Si f est continue et strictement monotone, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (où $f(I)$ est l'image de l'intervalle I par f).

Preuve

Voir le chapître sur la continuité$\square$

Remarque

Si f est continue et strictement monotone, alors f admet une fonction réciproque de $f(I)$ sur I.

Exemple

La fonction carré est continue strictement croissante de $[0\,;\,+\infty[$ *sur lui-même. Elle admet une bijection réciproque la fonction racine.*

Propriété

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit g la fonction réciproque de f et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

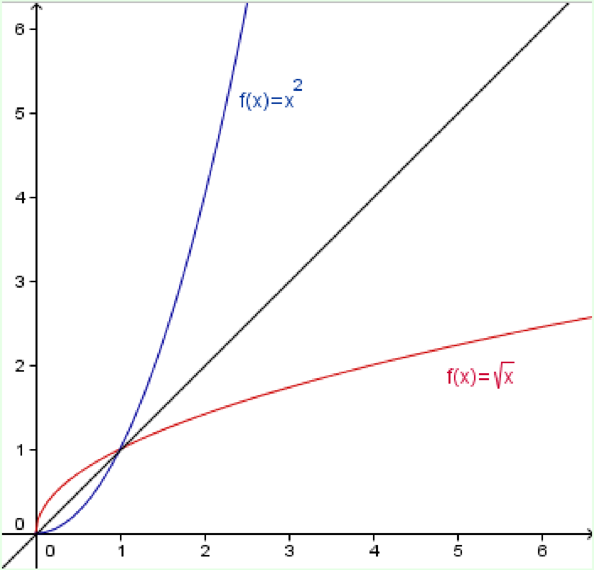
Propriété

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit g la fonction réciproque de f et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve

$M(x\,;\,y) \in \mathcal{C}_f$ *ssi* $y = f(x)$ *ssi* $x = g(y)$ *ssi* $N(y\,;\,x) \in \mathcal{C}_g$.
$M(x\,;\,y)$ *et* $N(y\,;\,x)$ *sont symétriques par rapport à la droite* Δ *d'équation* $y = x$ *: en effet leur milieu appartient à cette droite et la droite (MN) a pour coefficient directeur :* $\dfrac{y-x}{x-y} = -1$*, ce qui signifie qu'elle est perpendiculaire à la droite* Δ.$\square$

Exemple



Plan du cours

1 Vers une nouvelle fonction
1.1 Bijection. Fonction réciproque
1.2 Une nouvelle fonction

2 Etude de la fonction logarithme népérien

3 La fonction logarithme décimal

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ *et* $\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$.
Donc d'après le théorème de la bijection, l'image de $\mathbb{R}$ *par la fonction exp est* $]0\,;\,+\infty[$ *et pour tout* x *dans* $]0\,;\,+\infty[$*, l'équation* $e^t = x$*, d'inconnue* t*, admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$*. Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x.

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ *et* $\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$.
Donc d'après le théorème de la bijection, l'image de $\mathbb{R}$ *par la fonction exp est* $]0\,;+\infty[$ *et pour tout* x *dans* $]0\,;+\infty[$, *l'équation* $e^t = x$, *d'inconnue* t, *admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$. *Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x.

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
De plus, $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$*.*
Donc d'après le théorème de la bijection, l'image de $\mathbb{R}$ *par la fonction exp est* $]0\,;+\infty[$ *et pour tout* x *dans* $]0\,;+\infty[$*, l'équation* $e^t = x$*, d'inconnue* t*, admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$*. Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x*.*

John Napier (1550-1617)
(dit Néper en France)

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x *de* $]0\,;\,+\infty[$, *associe le réel* $\ln x$ *dont l'exponentielle est* x.

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0\,;+\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x.

Conséquences

(i) Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln e^x = x$
(iii) $\ln 1 = 0$
(iv) $\ln e = 1$

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0\,;\,+\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x.

Conséquences

(i) Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln e^x = x$
(iii) $\ln 1 = 0$
(iv) $\ln e = 1$

Preuve

(i) découle de la définition
(ii) $\ln e^x$ *est le seul réel dont l'exponentielle est* e^x*, c'est à dire* x.
(iii) $\ln 1 = \ln e^0 = 0$
(iv) $\ln e = \ln e^1 = 1\square$

Théorème

Soit $x > 0$ *et* $y \in \mathbb{R}$.

$y = \ln x$ *équivaut à* $x = e^y$

Théorème

Soit $x > 0$ *et* $y \in \mathbb{R}$.

$y = \ln x$ *équivaut à* $x = e^y$

Preuve

Si $y = \ln x$ *alors* $e^y = e^{\ln x} = x$

Si $e^y = x$ *alors comme* $x > 0$, $\ln e^y = \ln x$ *ou encore* $y = \ln x$ $\square$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln ab = \ln a + \ln b$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln ab = \ln a + \ln b$

Preuve

La fonction exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ *sur* $]0\,;+\infty[$.
De plus $a > 0$, *il existe donc d'après le théorème de la bijection, un unique réel* x *tel que* $e^x = a$. *Ce qui équivaut à* $x = \ln a$
De même $b > 0$, *il existe donc d'après le théorème de la bijection, un unique réel* y *tel que* $e^y = b$. *Ce qui équivaut à* $y = \ln b$
On a : $\ln ab = \ln e^x e^y = \ln e^{x+y} = x + y = \ln a + \ln b$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$ *et* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$*, on a :* $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$ *et* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Preuve

$0 = \ln 1 = \ln\left(\dfrac{1}{b} \times b\right) = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) + \ln b$. *D'où :* $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$.

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$ □

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Pour tous réels* $a_i > 0$, *avec* $1 \leqslant i \leqslant n$ *on a :*

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$$

Preuve

On note $\mathcal{P}_n$ *la proposition* $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$

Pour $n = 1$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \ln a_1$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \ln a_i = \ln a_1$, *donc* $\mathcal{P}_1$ *est vraie.*

Pour $n = 2$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \ln a_1 + \ln a_2 = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$ *d'après le théorème ci-dessus, donc* $\mathcal{P}_2$ *est vraie.*

On suppose que $\mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ *est encore vraie. On a :*

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) + \ln a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i + \ln a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \ln a_i.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vraie.*

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ *est vraie.*$\square$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\ln(a^n) = n \ln a$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a en posant* $a_i = a$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$ *:*

$$\ln a^n = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i = n \ln a.$$

Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. *On pose* $n' = -n$. $n' > 0$.

$$\ln a^n = \ln a^{-n'} = \ln\left(\frac{1}{a^{n'}}\right) = -\ln a^{n'} = -n' \ln a = n \ln a$$

On a : Si $n = 0$, *on a :* $\ln a^n = \ln 1 = 0$ *et* $n \ln a = 0$ *d'où le résultat.*

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *, on a :* $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *, on a :* $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$*.*

Preuve

Pour $a > 0$, $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$, *d'où l'égalité.*

Plan du cours

1 Vers une nouvelle fonction
1.1 Bijection. Fonction réciproque
1.2 Une nouvelle fonction

2 Etude de la fonction logarithme népérien

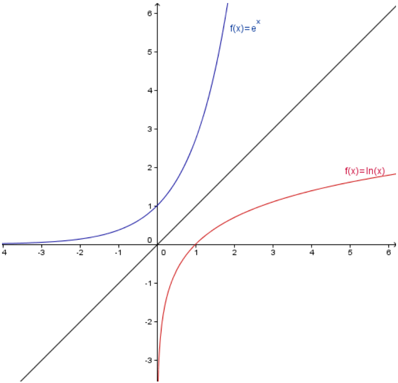
3 La fonction logarithme décimal

Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.

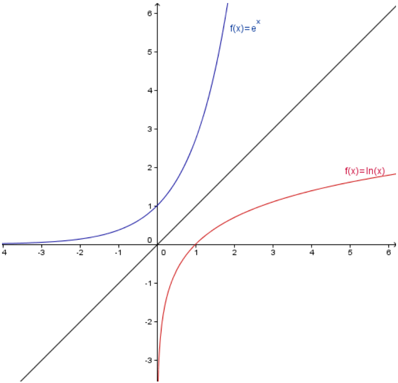
Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Preuve

On applique les résultats du paragraphe 1.1.$\square$

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Preuve

Soit $0 < u < v$. *On a donc :* $0 < e^{\ln u} < e^{\ln v}$ *et donc comme la fonction exponentielle est strictement croissante on a :* $\ln u < \ln v$ *et donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;\,+\infty[$.$\square$

Conséquences

Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

$\ln a = \ln b$ *ssi* $a = b$;

$\ln a < \ln b$ *ssi* $a < b$;

$\ln a > 0$ *ssi* $a > 1$;

$\ln a < 0$ *ssi* $0 < a < 1$.

Conséquences

Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

$\ln a = \ln b$ *ssi* $a = b$;

$\ln a < \ln b$ *ssi* $a < b$;

$\ln a > 0$ *ssi* $a > 1$;

$\ln a < 0$ *ssi* $0 < a < 1$.

Preuve

Cela découle directement de la stricte croissance du logarithme népérien.$\square$

Propriété

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Propriété

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Preuve

Soit $A > 0$. *On a :* $\ln x > A$ *qui équivaut à* $x > e^A$. *En posant* $B = e^A$, *on a donc pour* $x > B$, $\ln x > A$. *Ceci est valable pour A aussi grand que voulu, donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour $x > 0$, *on pose* $X = \dfrac{1}{x}$. *Alors* $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\ln X$.

Comme lorsque x *tend vers 0,* X *tend vers* $+\infty$, *on a :*

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty\square$

Propriété

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve

(i) Montrons que la fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve

(i) Montrons que la fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme

Pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$

Preuve du lemme

Supposons que pour $x > 0$, $\ln x > x - 1$.
Par stricte croissance de l'exponentielle on aurait : $x > e^{x-1}$
et en posant $t = x - 1$, *on aurait :* $t + 1 > e^t$
On pose $f(t) = e^t - t - 1$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a :*
$f'(t) = e^t - 1$
$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$, *d'où :*

Preuve du lemme

Supposons que pour $x > 0$, $\ln x > x - 1$.
Par stricte croissance de l'exponentielle on aurait : $x > e^{x-1}$
et en posant $t = x - 1$, *on aurait :* $t + 1 > e^t$
On pose $f(t) = e^t - t - 1$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a :*
$f'(t) = e^t - 1$
$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$, *d'où :*

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$		$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve du lemme

Supposons que pour $x > 0$, $\ln x > x - 1$.
Par stricte croissance de l'exponentielle on aurait : $x > e^{x-1}$
et en posant $t = x - 1$, *on aurait :* $t + 1 > e^t$
On pose $f(t) = e^t - t - 1$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a :*
$f'(t) = e^t - 1$
$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$, *d'où :*

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$		$+$	
Variations de f	$+\infty$		0		$+\infty$

D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on a :* $e^t \geqslant t + 1$.

Preuve du lemme

Supposons que pour $x > 0$, $\ln x > x - 1$.
Par stricte croissance de l'exponentielle on aurait : $x > e^{x-1}$
et en posant $t = x - 1$, *on aurait :* $t + 1 > e^t$
On pose $f(t) = e^t - t - 1$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a :*
$f'(t) = e^t - 1$
$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$, *d'où :*

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$		$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on a :* $e^t \geqslant t + 1$.
Par suite, on obtient une contradiction et donc on a bien le résultat annoncé dans le lemme.

Preuve

On a donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x - 1$, *et donc d'après le théorème des "gendarmes" on a* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0$.

Preuve

On a donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x - 1$, *et donc d'après le théorème des "gendarmes" on a* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0$.

Pour $0 < x < 1$, *on a :* $\ln x < 0$ *ou encore* $-\ln x > 0$ *c'est à dire* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

Preuve

On a donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x - 1$, *et donc d'après le théorème des "gendarmes" on a* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0$.

Pour $0 < x < 1$, *on a :* $\ln x < 0$ *ou encore* $-\ln x > 0$ *c'est à dire* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

Or d'après le lemme $0 < \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x} - 1$, *soit encore* $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x < 0$ *d'où d'après le théorème des "gendarmes", on a :* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln x = 0$.

Preuve

On a donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x - 1$, *et donc d'après le théorème des "gendarmes" on a* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0$.

Pour $0 < x < 1$, *on a :* $\ln x < 0$ *ou encore* $-\ln x > 0$ *c'est à dire* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

Or d'après le lemme $0 < \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x} - 1$, *soit encore*

$1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x < 0$ *d'où d'après le théorème des "gendarmes", on a :* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln x = 0$.

Limite à gauche et à droite de 1 étant égales, ln admet 0 comme limite en 1, et $\ln 1 = 0$ *d'où la continuité de ln en 1.*

Preuve (suite)

Soit $a > 0$. *Soit* h *tel que* $a + h > 0$.

On a : $\ln(a+h) = \ln a\left(1 + \dfrac{h}{a}\right) = \ln a + \ln\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)$

Preuve (suite)

Soit $a > 0$. *Soit* h *tel que* $a + h > 0$.

On a : $\ln(a+h) = \ln a\left(1+\frac{h}{a}\right) = \ln a + \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)$

Or comme ln est continue en 1, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{a}\right) = 0$ *et*

donc $\lim\limits_{h\to 0} \ln(a+h) = \ln a$ *et donc ln est continue en* a.

Preuve (suite)

Soit $a > 0$. *Soit* h *tel que* $a + h > 0$.

On a : $\ln(a+h) = \ln a\left(1+\dfrac{h}{a}\right) = \ln a + \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)$

Or comme ln est continue en 1, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right) = 0$ *et*

donc $\lim\limits_{h\to 0} \ln(a+h) = \ln a$ *et donc ln est continue en* a.

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.$\square$

Propriété

La fonction $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Propriété

La fonction $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Preuve

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose $y = \ln x$ *et* $b = \ln a$. *Comme la fonction ln est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :* $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a = b$

$$\tau(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{y - b}{e^y - e^b} = \frac{1}{\dfrac{e^y - e^b}{y - b}}.$$

Or la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, *donc* $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{e^y - e^b}{y - b} = e^b$

D'où : $\lim\limits_{x \to a} \tau(x) = e^{-b} = e^{-\ln a} = \dfrac{1}{a}$.

Donc la fonction $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$Signe\ de\ \ln'(x)$		$+$	1	$+$	
$Variations\ de\ \ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation :

	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique : Voir le début de paragraphe

Tableau de variation :

	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique : Voir le début de paragraphe

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives.

Alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique : Voir le début de paragraphe

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives.

Alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Preuve

On applique le théorème sur la dérivation des fonctions composées.

Propriété

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Propriété

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Propriété

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Propriété

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuve

(i) On pose $X = \ln x$*, d'où :* $x = e^X$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$.
$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$*. Or* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$*, donc :* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$*. D'où le résultat.*

Preuve

(i) On pose $X = \ln x$*, d'où :* $x = e^X$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$.
$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$*. Or* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$*, donc :* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$*. D'où le résultat.*
(ii) On pose $X = \dfrac{1}{x}$ *. On a :* $\lim\limits_{x \to 0} X = +\infty$*. On a :*
$x \ln x = \dfrac{1}{X} \ln \left(\dfrac{1}{X} \right) = \dfrac{-\ln X}{X}$.
D'après (i), on a : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$*, d'où (ii).*

Preuve (suite)

(iii) $f : x \mapsto \ln x$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et donc en particulier en 1.*

Donc le taux d'accroissement en 1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\ln x}{x-1}$ *admet une limite en 1, correspondant au nombre dérivé en 1.*

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = f'(1) = 1.$

Preuve (suite)

(iii) $f \; : \; x \mapsto \ln x$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et donc en particulier en 1.*

Donc le taux d'accroissement en 1, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\ln x}{x - 1}$ *admet une limite en 1, correspondant au nombre dérivé en 1.*

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = f'(1) = 1.$

(iv) On pose $X = 1 + x$*. On a :* $\lim\limits_{x \to 0} X = 1.$

On a : $\dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \dfrac{\ln X}{X - 1}$ *et donc en utilisant (iii), on a (iv).*$\square$

Propriété

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$ *:*
Pour h *voisin de 0, on a :* $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Propriété

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$ *:*
Pour h *voisin de 0, on a :* $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Preuve

Pour $h \neq 0$*, on pose* $\epsilon(h) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} - 1$*. Comme* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$*, on a :* $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
D'où pour h *proche de 0,* $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.$\square$

Plan du cours

1 Vers une nouvelle fonction
1.1 Bijection. Fonction réciproque
1.2 Une nouvelle fonction

2 Etude de la fonction logarithme népérien

3 La fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x *de* $]0\,;\,+\infty[$, *associe le réel* $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x *de* $]0\,;+\infty[$, *associe le réel* $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque

$\log 1 = 0$ *et* $\log 10 = 1$

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x de $]0\,;\,+\infty[$, associe le réel $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque

$\log 1 = 0$ *et* $\log 10 = 1$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\log ab = \log a + \log b$

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction qui à tout x *de* $]0\,;+\infty[$, *associe le réel* $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Remarque

$\log 1 = 0$ *et* $\log 10 = 1$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\log ab = \log a + \log b$

Preuve

On a : $\log ab = \dfrac{\ln ab}{\ln 10} = \dfrac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \log a + \log b\square$

Propriété

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$ *et* $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

Propriété

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$*, on a :* $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log b$ *et*
$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

Preuve

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{-\ln b}{\ln 10} = -\log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln 10} = \log a - \log b \square$$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\log(a^n) = n \log a$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, on a :* $\log(a^n) = n \log a$

Preuve

$$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \log a \square$$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, on a :* $\log(a^n) = n \log a$

Preuve

$$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \log a \square$$

Conséquence

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$*, on a :* $\log(10^n) = n$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\log(a^n) = n \log a$

Preuve

$$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \log a \square$$

Conséquence

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\log(10^n) = n$

Preuve

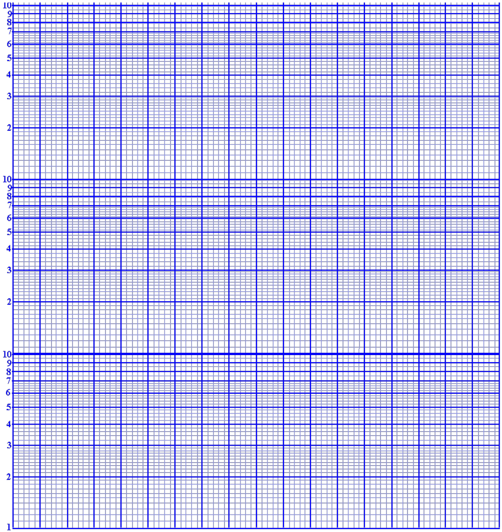
$$\log(10^n) = n \log 10 = n \square$$

Application : Papier semi-logarithmique pour la représentation de phénomènes variant sur de nombreuses puissances de 10.

Application : Papier semi-logarithmique pour la représentation de phénomènes variant sur de nombreuses puissances de 10.
Sur ce type de papier :

Application : Papier semi-logarithmique pour la représentation de phénomènes variant sur de nombreuses puissances de 10.
Sur ce type de papier :
- l'échelle sur l'axe des abscisses est l'échelle linéaire habituelle.

Application : Papier semi-logarithmique pour la représentation de phénomènes variant sur de nombreuses puissances de 10.
Sur ce type de papier :
- l'échelle sur l'axe des abscisses est l'échelle linéaire habituelle.
- l'échelle sur l'axe des ordonnées est l'échelle logarithmique c'est à dire qu'à chaque valeur y on fait correspondre son logarithme décimal $\log y$. Ce qui explique par exemple que l'écart entre 20 et 30 en ordonnée est le même qu'entre 2 et 3 puisque :
$\log(30) - \log(20) = \log(30/20) = \log(3/2) = \log 3 - \log 2$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1