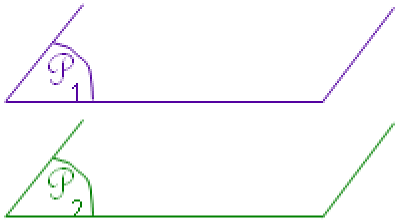
Géométrie dans l'espace

1 Elèments de géométrie dans l'espace

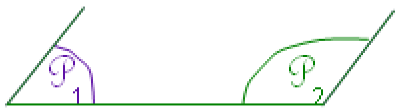
1.1 Positions relatives de droites et plans

1.1.1 Position relative de deux plans

Définition :
On dit que deux plans sont strictement parallèles s'ils n'ont aucun point d'intersection.



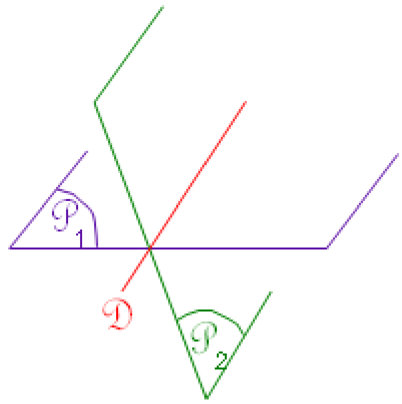
Deux plans sont dits confondus si tout point de l'un appartient à l'autre.



On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont strictement parallèles ou confondus.

Notation : Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans parallèles. On note $(\mathcal{P}_1) \parallel (\mathcal{P}_2)$.

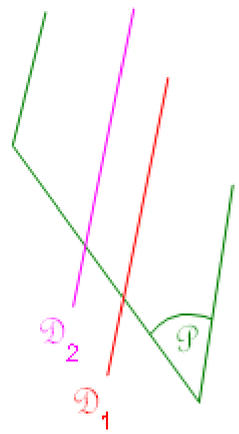
Définition : Deux plans qui ne sont pas parallèles sont dits sécants. Dans ce cas, l'intersection est une droite.



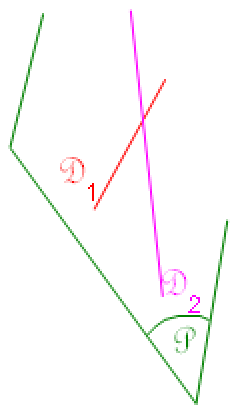
Notation : Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans sécants. On note $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) = (\mathcal{D})$.

1.1.2 Position relative de deux droites

Définition :
On dit que deux droites sont parallèles s'il existe un plan dans lequel elles sont parallèles.



On dit que deux droites sont sécantes si il existe un plan où elles sont sécantes.



Des droites de l'espace qui sont parallèles ou sécantes sont dites coplanaires.

Notation : On conserve la notation habituelle pour le parallélisme de droites, à savoir $\|$.

Remarques : Seules des droites sécantes ont un seul point d'intersection. A noter que les droites strictement parallèles ne sont plus les seules à n'avoir aucun point d'intersection : c'est aussi le cas des droites non coplanaires.

1.1.3 Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété :
Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ peuvent :
- soit être sécants : il y a alors un seul point d'intersection.
- soit avoir une infinité de points communs : la droite est incluse dans le plan
- soit n'avoir aucun point commun : la droite est alors parallèle au plan. En particulier, il existe une droite du plan telle que cette droite soit parallèle à la droite de départ.

1.2 Parallélisme dans l'espace

Propriété :
Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre et toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Théorème du « toit » :
Soit deux droites parallèles, soit deux plans contenant ces droites se coupant en une troisième droite. Alors cette droite est parallèle aux deux premières.

Propriété :
On considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, et deux droites sécantes $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}'_1)$ incluses dans $(\mathcal{P}_1)$ et deux droites sécantes $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_2)$ incluses dans $(\mathcal{P}_2)$ telles que : $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_1) \parallel (\mathcal{D}'_2)$. Alors : $(\mathcal{P}_1) \parallel (\mathcal{P}_2)$.

Propriété :
On considère deux plans$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ parallèles. Alors tout plan $(\mathcal{P})$ coupant l'un coupe l'autre. En notant $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}_1) = (\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}_2) = (\mathcal{D}_2)$ alors $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$.

1.3 Orthogonalité dans l'espace

Définition :
On dit que deux droites de l'espace sont perpendiculaires si elles sont coplanaires et sécantes en formant un angle droit.

Définition :
On dit que deux droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales si il existe une droite $(\mathcal{D})$ parallèle à $(\mathcal{D}_1)$ qui soit perpendiculaire à $(\mathcal{D}_2)$.

Propriétés :
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété :
Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors cette droite est perpendiculaire au plan.

Conséquence :Une droite qui est perpendiculaire à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété :
Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Propriété :
Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Propriété :
Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, leur intersection est perpendiculaire à ce plan.

1.4 Plan médiateur

Définition :
On appelle plan médiateur d'un segment le plan passant par le milieu du segment et perpendiculaire à la droite support de ce segment.

Propriété :
Tout point situé sur le plan médiateur d'un segment est équidistant des sommets de ce segment. Réciproquement, si un point de l'espace est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur le plan médiateur de ce segment.

Preuve : Soit [AB] un segment et I son milieu.
Soit (P) le plan médiateur de [AB].
Soit M appartenant à P.

Alors (MI) est perpendiculaire à [AB] puisque (AB) est perpendiculaire à (P) et donc à toute droite de P, en particulier (MI). Dans le plan (MAB), (MI) est la médiatrice de [AB] et donc M est équidistant de A et de B.

Réciproquement soit M équidistant de A et de B. On considère le plan (Q), passant par M et perpendiculaire à (AB). Ce plan coupe (AB) en K. (MK) est perpendiculaire à (AB) et MA=MB, donc dans le plan (ABM), (MK) est la médiatrice de [AB] et donc K est le milieu de [AB]. Par suite, (Q) est le plan médiateur de [AB].

2 Sections planes d'un solide

2.1 Généralités

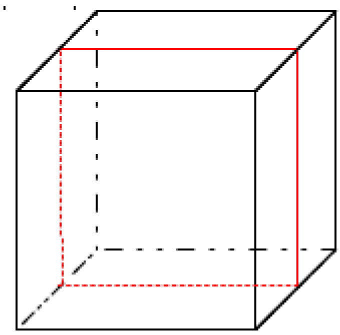
Définition : La section d'un solide par un plan correspond à la « trace » laissée par ce plan sur le solide, qui est formée par l'ensemble des points communs au solide et au plan.

Exemples : Pyramide régulière, cône, cube, sphère

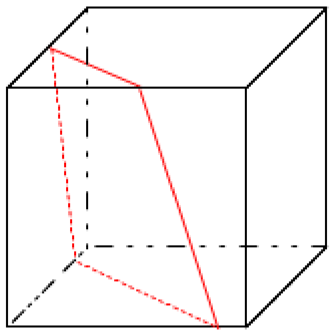
2.2 Section d'un cube par un plan

Propriété : La section d'un cube par un plan peut-être :

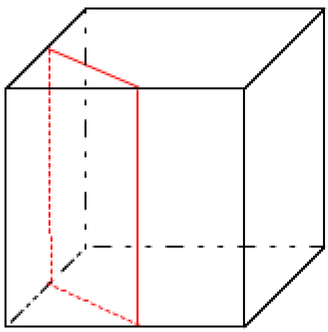
- un carré : plan parallèle à une face



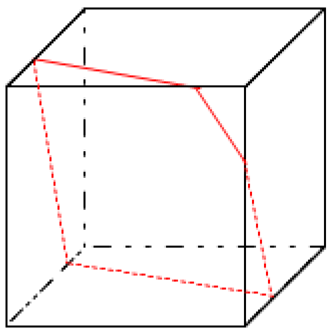
- un trapèze :



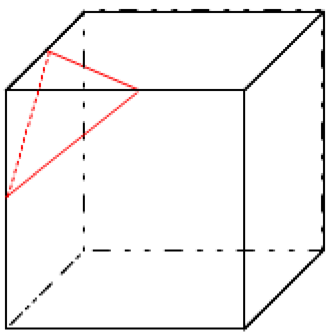
- un rectangle : plan parallèle à une arête



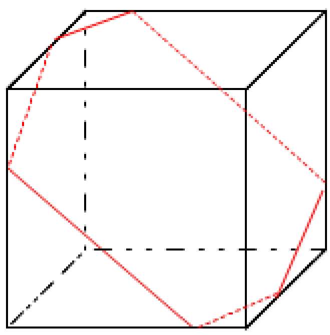
- un pentagone :



- un triangle :



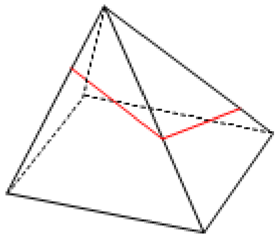
- un hexagone :



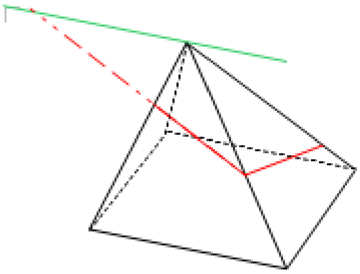
2.3 Savoir construire la section plane d'un solide

Méthode : La construction de la section d'un polyèdre par un plan se fait en construisant l'intersection de ce plan avec les différentes faces du solide. On peut alors se rappeler :
1. qu'en connaissant deux points distincts appartenant tous les deux à deux plans distincts, on connaît alors l'intersection de ce plan.
2. que la section d'un plan coupé par deux plans parallèles sont deux droites parallèles.
3. du théorème du toit.
4. que l'on peut « sortir » du solide.

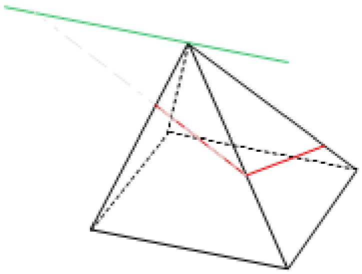
Exemple : Compléter la section par un plan de la pyramide à base rectangulaire suivante :



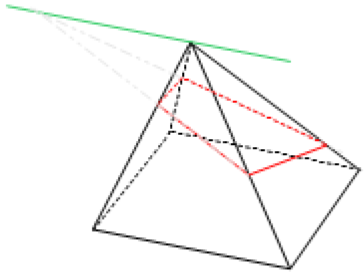
Solution : Deux arrêtes opposés de la base sont parallèles. Donc en utilisant le théorème du toit et en sortant du solide on obtient :



On trace la droite verte, intersection du plan de face et du plan arrière ; en utilisant le théorème du toit, cette droite est parallèle aux deux arrêtes avant et arrière de la base.



En « sortant » de la pyramide on trouve un deuxième point d'intersection avec la face arrière de la pyramide.



Ce qui permet de compléter la section.

3 Géométrie vectorielle

3.1 Définition

Définition :
On appelle vecteur de l'espace, la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur.

Notation : Soient A et B deux points de l'espace, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur ayant pour direction la droite (AB), le sens de A à B et de longueur AB.

Définition :
On note $\|\overrightarrow{u}\|$ la longueur d'un vecteur et on l'appelle norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition :
Deux vecteurs sont dits égaux si ils ont même direction, même sens et même longueur.

Conséquences :

1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe une infinité de représentants de $\overrightarrow{u}$.
2. On appelle vecteur nul, et on note $\overrightarrow{0}$, tout vecteur ayant pour longueur 0.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
4. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Le vecteur ayant même direction et même longueur que $\overrightarrow{u}$ et de sens opposé est noté $-\overrightarrow{u}$.

Traduction de l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme ou encore que [AD] et [BC] ont le même milieu ou encore que D est l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Vecteurs coplanaires :

Définition : On dit que des vecteurs sont coplanaires si l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs dont les extrémités appartiennent à un même plan.

Propriété :
Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

3.2 Opérations sur les vecteurs

3.2.1 Somme de vecteurs

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Comme deux vecteurs sont toujours coplanaires, on peut revenir à la somme de deux représentants de ces vecteurs dans un plan.

Par suite, on étend la relation de Chasles (mathématicien français (1793 – 1880)) à l'espace :

<u>Relation de Chasles :</u>

Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points. On a :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

<u>Conséquences :</u>
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (associativité de l'addition de vecteurs)
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (commutativité de l'addition de vecteurs)
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ (est l'élément neutre de l'addition de vecteurs)
$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ ($-\overrightarrow{u}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ dans l'addition de vecteurs)

Preuve : Faire des figures

<u>Règle du parallélogramme :</u>Soit A, B et C trois points. Soit M un quatrième point. ABMC est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

3.2.2 Multiplication par un scalaire

<u>Définition :</u>
Soit α un réel non nul et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\alpha\overrightarrow{u}$ est le vecteur :
– qui a la même direction que $\overrightarrow{u}$;
– qui, si $\alpha > 0$, a le même sens que $\overrightarrow{u}$ et sinon un sens opposé ;
– $\|\alpha\overrightarrow{u}\| = |\alpha| \, \|\overrightarrow{u}\|$
Pour tout réel α et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on pose : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

<u>Propriété :</u> Soit α et β deux réels. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On a :
$\alpha\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$
$(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$
$\alpha\,(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\,\overrightarrow{u}$
$\alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \,\text{ou}\, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Preuve : Similaire au plan

3.3 Applications

3.3.1 Droites de l'espace

<u>Définition :</u>
On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace sont <u>colinéaires</u> si ils ont la même direction. Autrement dit il existe α non nul tel que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$.

<u>Définition :</u>
Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires est une droite de l'espace, notée $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \overrightarrow{u})$, passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

3.3.2 Vecteurs coplanaires

Propriété (admise) :
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels α, β et γ tels que : $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.
De plus, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, alors : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}$.

Propriété (admise) :
Soit A, B, C et D quatre points
A, B, C et D sont coplanaires ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

3.3.3 Caractérisation d'un plan

Propriété (admise) :
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Soit A un point.
Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et C le point tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}$, avec α et β deux réels, est le plan (ABC).
On dit que le plan (ABC) est dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

4 Avec des coordonnées

4.1 Repérage dans l'espace

Définition : Soit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace. Le quadruplet $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ constitue un repère de l'espace. On note : I le point tel que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$, J le point tel que $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$ et K le point tel que $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{k}$. Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux alors on dit que $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthogonal. Si de plus les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ont même longueur égale à 1 alors $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormal.

Propriété-Définition : Soit M un point de l'espace, muni d'un repère $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$. Alors il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tels que : $\overrightarrow{OM}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$. x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la côte de M.

4.2 Coordonnées d'un vecteur. Distance entre deux points

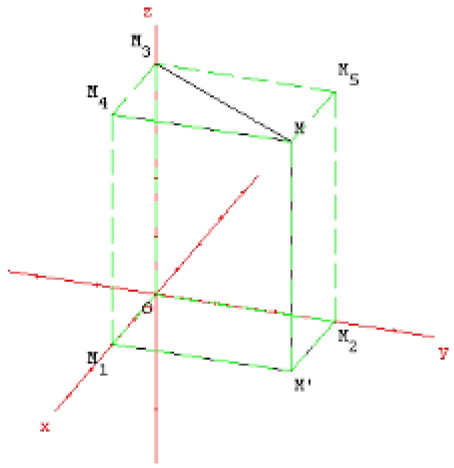
Propriétés : Soient $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\,;\,z_B-z_A)$.
Les coordonnées du milieu de [AB] sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Preuve : Identiques au plan

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$. Soit λ un réel.
Alors : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\,(x+x'\,;\,y+y'\,;\,z+z')$ et $\lambda\overrightarrow{u}\,(\lambda x\,;\,\lambda y\,;\,\lambda z)$

Propriété : Soient $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(0\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$. Alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Démonstration :



On note M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. M a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A\,;\, z_B - z_A)$. On a grâce au théorème de Pythagore :

$OM^2 = OM'^2 + OM_3^2$
$OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2$
$OM^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$
et donc le résultat.

Conséquence : Soit $\overrightarrow{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ un vecteur de l'espace muni d'un repère $\left(0\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$. Alors : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.3 Équations de quelques objets de l'espace

On muni l'espace d'un repère orthonormal.

4.3.1 Plans parallèles aux plans de coordonnées

Propriété : Pour un plan parallèle au plan xOy, passant par le point de coordonnées $(0, 0, c)$, a pour équation : $z = c$.
Pour un plan parallèle au plan xOz, passant par le point de coordonnées $(0, b, 0)$, a pour équation : $y = b$.
Pour un plan parallèle au plan yOz, passant par le point de coordonnées $(a, 0, 0)$, a pour équation : $x = a$.

4.3.2 Sphère

Propriété : Une sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega\,;\,y_\Omega\,;\,z_\Omega)$ et de rayon R a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

Démonstration : Soit $M(x; y; z)$. On a : $\Omega M = R$ ssi $\Omega M^2 = R^2$ ssi $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$

4.4 Représentation paramétrique

4.4.1 d'une droite de l'espace

Théorème-Définition : On munit l'espace d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$. Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ un vecteur non nul.
Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$.

On dit que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Preuve : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$.□

Exemple : 1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1;2;4)$ et $B(3;-2;-1)$
2. Dire si les points suivants appartiennent à (AB) : $E(6\,;\,-8\,;\,-8,5)$ et $F(-3\,;\,2\,;\,2,5)$.

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$.

2. $E \in (AB)$ et $F \notin (AB)$.

Remarque : La représentation paramétrique d'un segment ou d'une demi-droite est analogue, simplement que l'on choisit $\overrightarrow{u}$ et t convenablement :

pour le segment $[AB]$, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $t \in [0\,;\,1]$.

pour la demi-droite $[AB)$, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $t \in [0\,;\,+\infty[$.

4.4.2 d'un plan de l'espace

Théorème-Définition : On munit l'espace d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$. Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha'\,;\,\beta'\,;\,\gamma')$ deux vecteurs non colinéaires.
Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}$.

On dit que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Preuve : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists t' \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists t' \in \mathbb{R} :$
$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}$.□

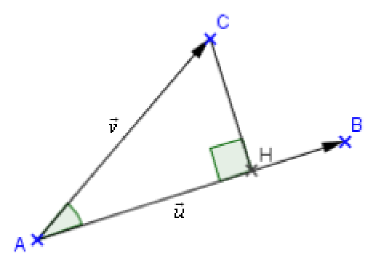
5 Rappels sur le produit scalaire dans le plan

5.1 Définition

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ (qui se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ») le réel définit par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$$

Si l'un des vecteurs est nul, on pose, par définition : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$



Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
On appelle carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ (noté $\overrightarrow{u}^2$) : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$.
On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ et on note $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2}$.

Propriété : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel. On a : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k|\|\overrightarrow{u}\|$

Preuve : Soient A et B des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Soit C un point tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
On a $AC = |k|AB$.
D'où : $\overrightarrow{v}^2 = AC^2 = k^2AB^2$, d'où le résultat en passant à la racine carrée :

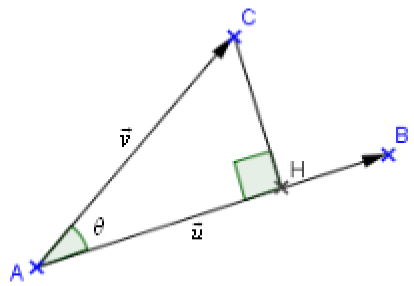
$$\|k\overrightarrow{u}\| = |k|\|\overrightarrow{u}\| \square$$

5.2 Lien entre produit scalaire, norme et cosinus

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Preuve : Soient A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On note $\theta = \widehat{BAC}$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :



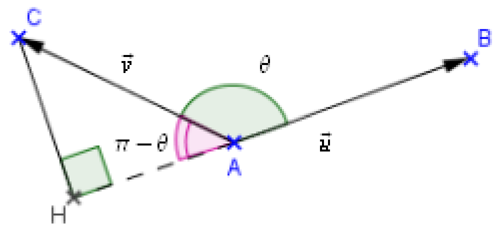
alors $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$.
Or, dans le triangle AHC, rectangle en H, on a :

$$\cos\theta = \frac{AH}{AC}$$

d'où :

$$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos\theta.$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :



alors $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$.
Or, dans le triangle AHC, rectangle en H, on a :

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{AC}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= -AB \times AC \times \cos(\pi - \theta) \\ &= AB \times AC \times \cos\theta. \end{aligned}$$

.

et comme $\cos\theta = \cos(\vec{u}, \vec{v})$, $AB = \|u\|$, $AC = \|v\|$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \square$$

5.3 Vecteurs orthogonaux

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si soit l'un d'entre eux est nul, soit leurs directions sont perpendiculaires.

5.4 Propriétés

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de D sur (AB).

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$

$\overrightarrow{HK}$ est appelé le vecteur projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

Preuve : Soit E le point tel que : $\overrightarrow{AE} = \vec{v}$. On note E' le projeté orthogonal de E sur (AB)
On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE'}$.

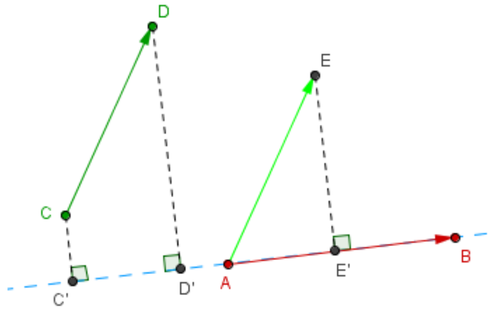
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE'}$ sont de même sens (et il en est de même pour $\overrightarrow{HK}$), on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AE'$.
On a : $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{HK}{CD}$, d'où

$$AE' = AE \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = CD \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = HK$$

Dans ce cas, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB \times AE' = AB \times HK = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$

.



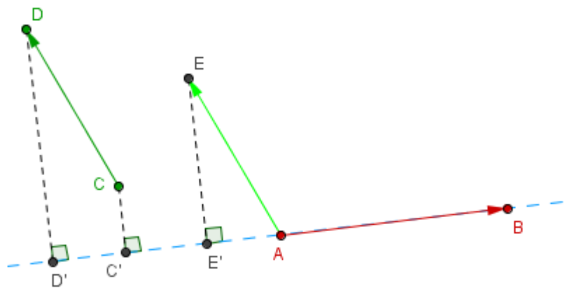
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE'}$ sont de sens contraires (et il en est de même pour $\overrightarrow{HK}$), on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AE'$.
On a : $\cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right) = \dfrac{HK}{CD}$, d'où

$$AE' = AE \times \cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)\right) = -CD \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = HK$$

Dans ce cas, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = -AB \times AE' = -AB \times HK = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$

.



<u>Propriété :</u> Soit trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et k un réel.
Alors :
- (i) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- (ii) $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
- (iii) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

<u>Preuve :</u> (i) Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, l'égalité est vérifiée.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, d'où comme $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,[2\pi]$, on a : $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et la multiplication de réels étant commutative, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
(ii) Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, l'égalité est vérifiée.
Si $k = 0$, l'égalité est vérifiée.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors :
– si $k > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) & = & \|\overrightarrow{u}\| \times \|k\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) \\ & = & \|\overrightarrow{u}\| \times |k| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) \end{array}$$

$(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,[2\pi]$, et $|k| = k$ d'où :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) & = & k\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ & = & k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) \end{array}$$

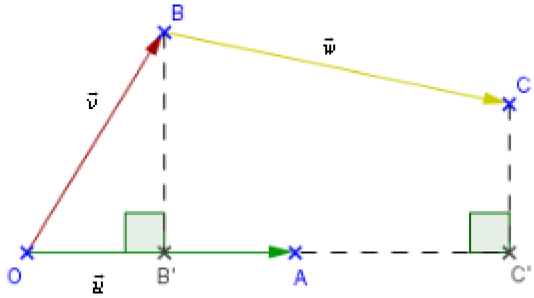
– si $k < 0$

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) & = & \|\overrightarrow{u}\| \times \|k\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) \\ & = & \|\overrightarrow{u}\| \times |k| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) \end{array}$$

$(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, k\overrightarrow{v})\,[2\pi] = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi[2\pi]$, et $|k| = -k$ d'où :

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) &= -k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\pi+(\vec{u},\vec{v})\right)\\ &= -k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left(-\cos(\vec{u},\vec{v})\right)\\ &= k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})\\ &= k\,(\vec{u}\,.\,\vec{v})\end{aligned}$$

(iii) Soit O, A, B et C quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{w}$.
Soit B' (resp. C') le projeté orthogonal de B (resp. C) sur (OA).
Les vecteurs $\overrightarrow{OB'}$et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires car B' et C' appartiennent à (OA), donc il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{OB'}$.
On a donc :



$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} &= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{B'C'}\\ &= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA}.\left(k\overrightarrow{OB'}\right)\\ &= (1+k)\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) &= \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC'}\end{aligned}$$

et $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C'}=(1+k)\overrightarrow{OB'}$, d'où : $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{u}\,.\,\vec{w}\square$

<u>Propriété :</u> Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

<u>Preuve :</u>

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}+\vec{v})\\ &= (\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{u}+(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2+\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{v}\,.\,\vec{u}+\|\vec{v}\|^2\\ &= \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\,.\,\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

d'où le résultat.$\square$

5.5 Expression analytique du produit scalaire

<u>Propriété :</u> On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0,\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs.
Alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'$

<u>Preuve :</u> On a : $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}$.
D'où :

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,\vec{v} &= \left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right).\left(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}\right)\\ &= x\,\vec{i}\,.\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)+y\,\vec{j}\,.\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)\\ &= xx'\,\vec{i}^{\,2}+xy'\,\vec{i}\,.\,\vec{j}+yx'\,\vec{j}\,.\,\vec{i}+yy'\,\vec{j}^{\,2}\end{aligned}$$

Or, $\vec{i}^{\,2}=1$, $\vec{j}^{\,2}=1$ et $\vec{i}\,.\,\vec{j}=\vec{j}\,.\,\vec{i}=0$, d'où : $\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'$.$\square$

Conséquence : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ un vecteur.
Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

5.6 Projeté orthogonal sur un axe

Propriété Définition : Soit $\left(0, \vec{i}\right)$ le repère normé d'un axe.
Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{u}$ sur cet axe est le vecteur $\left(\vec{u}\,.\,\vec{i}\right)\vec{i}$.

Preuve : Soit $\vec{j}$ le vecteur unitaire tel que $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit un repère orthonormal.
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, d'où : $\vec{i}\,.\,\vec{u} = \vec{i}\,.\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right) = x$.
Soit $\vec{u'}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur l'axe.
$\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
Or $\vec{u'}\,.\,\vec{j} = 0$, d'où : $y' = 0$.
Donc $\vec{u'} = x'\vec{i}$ et donc $\vec{i}\,.\,\vec{u'} = \vec{i}\,.\left(x'\vec{i}\right) = x'$.
Or, $\vec{i}\,.\,\vec{u} = \vec{i}\,.\,\vec{u'}$, d'où : $x = x'$ et donc : $\vec{u'} = \left(\vec{u}\,.\,\vec{i}\right)\vec{i}$.

6 Produit scalaire dans l'espace

6.1 Définition

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
– Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:
Soit A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$
Soit $(\mathcal{P})$ un plan contenant A, B et C (il en existe au moins un !)
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace, noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$, est le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.
– Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors on pose $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ (noté $\vec{u}^2$) : $\vec{u}^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u}$.
On appelle norme de $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On a : $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

Preuve : Similaire au plan.□

6.2 Lien entre produit scalaire, norme et cosinus

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
On a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Preuve : Se déduit du plan.

6.3 Propriétés

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'appliquent à des vecteurs coplanaires de l'espace
En particulier, deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant coplanaires, on a, avec k un réel :
– (i) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
– (ii) $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\,(\vec{u}\,.\,\vec{v})$
– $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Propriété :
Soit trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a :

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Preuve :Admis (trois vecteurs ne sont pas forcément coplanaires et la démonstration n'est pas évidente)

6.4 Orthogonalité dans l'espace

6.4.1 Orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition : On dit que deux droites sécantes de l'espace sont perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles en passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si soit l'un d'entre eux est nul, soit leurs directions sont orthogonales.

6.4.2 Perpendicularité d'un plan et d'une droite

Propriété : Soit une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $(\mathcal{P})$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.
(ii) Pour tous points M et N de $(\mathcal{P})$, on a : $\vec{u}.\overrightarrow{MN} = 0$.
(iii) Pour tout couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{v}, \vec{w})$ de $(\mathcal{P})$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$

Preuve : C'est la traduction en terme de produit scalaire des équivalences suivantes :
$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires ssi $(\mathcal{D})$ orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$
ssi $(\mathcal{D})$ orthogonale à deux côtés d'un triangle de $(\mathcal{P})$

6.4.3 Vecteur normal à un plan, plans perpendiculaires

Définition : On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur non nul $\vec{n}$ qui est vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Propriété (admise) : Soit $(\mathcal{P})$ un plan, $A \in (\mathcal{P})$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
$M \in (P)$ ssi $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Définition : On dit que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

6.5 Expression analytique du produit scalaire

Propriété : On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Preuve : Similaire au plan.□

Conséquence : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ un vecteur.
Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6.6 Projections orthogonales dans l'espace

<u>Définition :</u> Soit $(\mathcal{P})$ un plan et M un point de l'espace.
On appelle projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$ le point M' intersection de la droite perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ et passant par M avec le plan $(\mathcal{P})$.

<u>Définition :</u> Soit $(\mathcal{D})$ une droite et M un point de l'espace.
On appelle projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ le point M' intersection du plan perpendiculaire à $(\mathcal{D})$, passant par M, avec la droite $(\mathcal{D})$.

6.7 Applications

6.7.1 Equation cartésienne d'un plan

<u>Théorème :</u> On munit l'espace d'un repère orthonormal.
- (i) Soit $(\mathcal{P})$ un plan et $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Alors le plan a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- (ii) Réciproquement, soit a, b, c (non tous les trois nuls) et d quatre réels, l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$.

<u>Preuve :</u> (i) Soit $A\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)\in(\mathcal{P})$
Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$.
$M\in(\mathcal{P})$ ssi $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ ssi $a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$
ssi $ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$
En posant $d=-ax_0-by_0-cz_0$, on obtient bien $M\in(\mathcal{P})$ ssi $ax+by+cz+d=0$.
(ii) Réciproquement si $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathcal{P})$ d'équation $ax+by+cz+d=0$.
On peut toujours choisir $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ tel que : $d=-ax_0-by_0-cz_0$ (en effet par exemple si $a\neq 0$, on choisit arbitrairement $y_0=0$ et $z_0=0$ et on en déduit : $x_0=-\dfrac{d}{a}$)
On note $A\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$. Ce point appartient à $(\mathcal{P})$.
On a : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathcal{P})$ ssi $ax+by+cz+d=0$ ssi $a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$.
Et en notant $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$, on a $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ ce qui équivaut à dire que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

6.7.2 Distance d'un point à un plan

<u>Théorème :</u> On munit l'espace d'un repère orthonormal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan d' équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Soit $A\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est égale à : $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

<u>Preuve :</u>$(\mathcal{P})$admet $\overrightarrow{n}(a\,,\,b\,,\,c)$ comme vecteur normal.
Soit $H(x',\,y',\,z')$ le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.
On a $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ qui sont colinéaires, d'où il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{n}$. D'où : $\begin{cases} x'=x_0+ka \\ y'=y_0+kb \\ z'=z_0+kc \end{cases}$.
De plus $H\in(\mathcal{P})$, donc : $a(x_0+ka)+b(y_0+kb)+c(z_0+kc)+d=0$.
D'où : $k=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.
Et donc

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AH}\| &= |k|\times\|\overrightarrow{n}\| \\ &= \left|-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\square \end{aligned}$$

6.7.3 Demi-espace

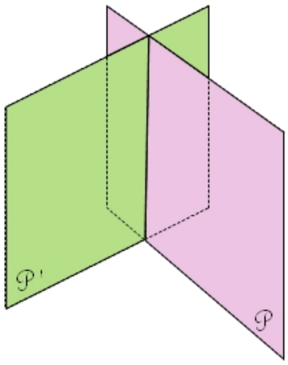
Définition : On munit l'espace d'un repère orthonormal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan d' équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Ce plan partage l'espace en deux demi-espaces ouverts (respectivement fermés) :
- l'un ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax+by+cz+d>0$ (respectivement $ax+by+cz+d\geqslant 0$)
- l'autre ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax+by+cz+d<0$ (respectivement $ax+by+cz+d\leqslant 0$).

7 Intersections

7.1 Intersection de deux plans

Etude géométrique :
Deux plans de l'espace peuvent être :
- soit parallèles (de manière stricte ou confondus),

- soit sécants suivant une droite.



On peut caractériser ceci par le théorème admis suivant :

Théorème : Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires

Remarque : La négation de ce théorème est :
Deux plans sont sécants ssi leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.
Etude algébrique :

Théorème : Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne respective $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ssi $(a\,;\,b;\,c)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c')$ sont proportionnels.
  Dans ce cas $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ssi $(a\,;\,b;\,c\,;\,d)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c'\,;\,d')$ sont proportionnels et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles ssi $(a\,;\,b;\,c\,;\,d)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c'\,;\,d')$ ne sont pas proportionnels.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants ssi $(a\,;\,b;\,c)$ et $(a'\,;\,b'\,;\,c')$ ne sont pas proportionnels. L'équation de la droite d'intersection est alors un système : $\left\{\begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$, appelé système d'équations cartésiennes de la droite.

Remarque : A partir d'un système d'équations cartésiennes d'une droite on peut bien entendu revenir à une représentation paramétrique de cette droite et réciproquement.

Exemples : Les plans suivants sont ils sécants ? Si oui, donner une équation cartésienne de la droite d'intersection, puis une représentation paramétrique de cette droite, puis donner un point de cette droite et un vecteur directeur.

1. $\mathcal{P}\ :\ 2x+3y-z+1=0$ et $\mathcal{P}'\ :\ -1,2x-1,8y+0,6z+3=0$.
2. $\mathcal{P}\ :\ 5x-3y+2z-1=0$ et $\mathcal{P}'\ :\ -3x+5y-2z+1=0$.

Résolution :1. $(-1,2\,;\,-1,8\,;\,0,6) = -0,6 \times (2\,;\,3\,;\,-1)$, donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. De plus $3 \neq -0,6 \times 1$ donc ces plans sont strictement parallèles.

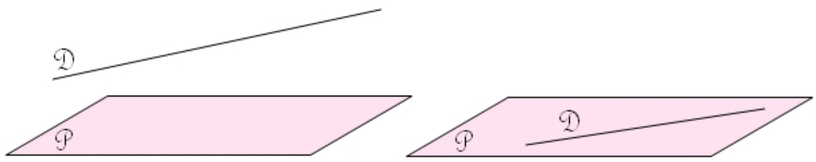
2. On a : $-3 = -\dfrac{3}{5} \times 5$ et $5 \neq -\dfrac{3}{5} \times (-3) = \dfrac{9}{5}$, donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, suivant la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ -3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ (S). On pose $z = t$, où : $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -2t + 1 \\ -3x + 5y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 3x - 5y \\ -3x + 5y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 8y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{8} \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{8} \\ z = t \end{cases}.$$

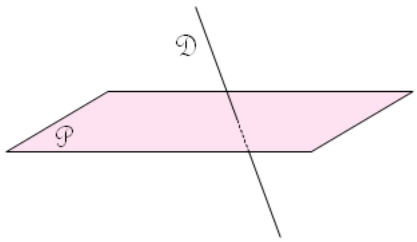
$\mathcal{D}$ est la droite passant par $A\left(\dfrac{1}{8}\,;\,-\dfrac{1}{8}\,;\,0\right)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées$(-1\,;\,1\,;\,4)$.

7.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Etude géométrique :
Un plan et une droite de l'espace peuvent être :
– soit parallèles (de manière stricte ou confondus),



– soit sécants suivant un point.



On peut caractériser ceci par le théorème admis suivant :

Théorème : Un plan et une droite sont parallèles si et seulement si un vecteur normal du plan et un vecteur directeur de la droite sont orthogonaux.

Etude algébrique :

Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et une droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$.

Etudier l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ revient à résoudre le système : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$.

Ce système n'admet pas de solution ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles. (Faire une figure)
Ce système admet une infinité de solutions ssi $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$. (Faire une figure)
Ce système n'admet qu'une seule solution ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécantes en un point. (Faire une figure)

Exemples : Les droites $\mathcal{D}$ suivantes et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $6x + 2y - 5z + 7 = 0$ sont ils sécants ? Donner éventuellement les coordonnées du point d'intersection.
1. $\mathcal{D}$ passant par $A(-1\,;\,2\,;\,3)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1\,;\,2\,;\,2)$.
2. $\mathcal{D}$ passant par $A(-5\,;\,9\,;\,-1)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(-3\,;\,4\,;\,-2)$.
3. $\mathcal{D}$ passant par $A(2\,;\,3\,;\,4)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$.
Solution :

1. $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.
1. $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.
1. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécantes en $(-0,5\,;\,-4,5\,;\,-1)$
