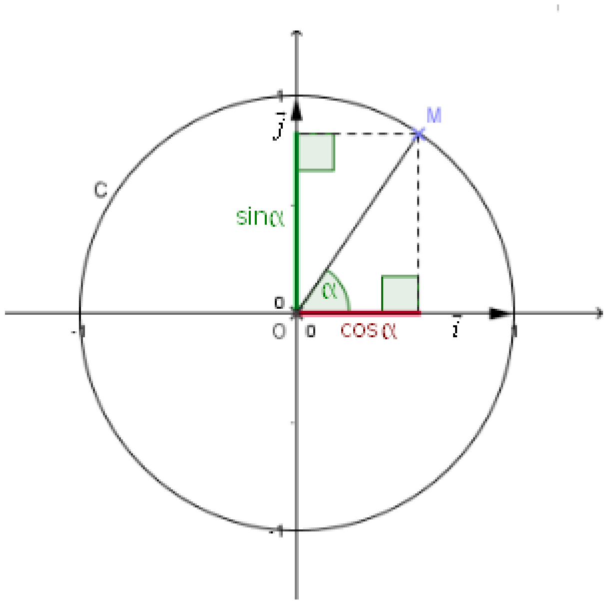
Trigonométrie

1 Quelques rappels

Définition :
Soit α un réel. Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$. On appelle cosinus et sinus de l'angle α et l'on note respectivement $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$:
$\overrightarrow{OM}=\cos\alpha\,\overrightarrow{i}+\sin\alpha\,\overrightarrow{j}$



Remarque : Pour des valeurs de $\alpha\in\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on retrouve le cosinus et le sinus de l'angle géométrique aigu .

Propriété :
On a pour tout réel α et pour tout entier relatif k :
$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$
$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$ et $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$. On dit que le cosinus et le sinus sont 2π périodiques.
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Valeurs remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété :

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

2 Deux nouvelles fonctions

Définition :
Soit x un réel. On appelle fonction cosinus, la fonction $x \mapsto \cos x$ et fonction sinus la fonction $x \mapsto \sin x$.

Propriété :
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.

Propriété :
On peut réduire l'étude à un intervalle de longueur 2π et la représentation graphique de cos (resp. sin) sur $\mathbb{R}$, s'obtiendra à partir de celle sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par exemple (à vrai dire $]-\pi;\pi]$ suffit), par translation de vecteur $2k\pi\,\overrightarrow{i}$.

Propriété :
La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Propriété :
On peut réduire l'intervalle d'étude à $[0\,;\,\pi]$. La courbe de cos (resp. sin) sur $[-\pi\,;\,\pi]$ s'obtiendra par symétrie axiale d'axe celui des ordonnées de la courbe de cos sur $[0\,;\,\pi]$ (resp. par symétrie centrale de centre l'origine du repère de la courbe de sin sur $[0\,;\,\pi]$)

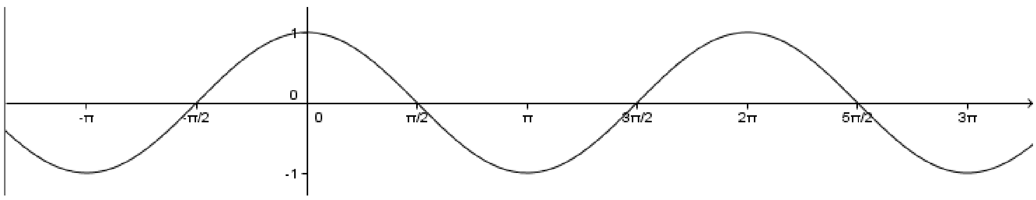
Propriété :
Les fonctions cosinus et sinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a pour $x \in \mathbb{R}$: $(\cos)'(x) = -\sin x$ et $(\sin)'(x) = \cos x$.

Tableau de variations :

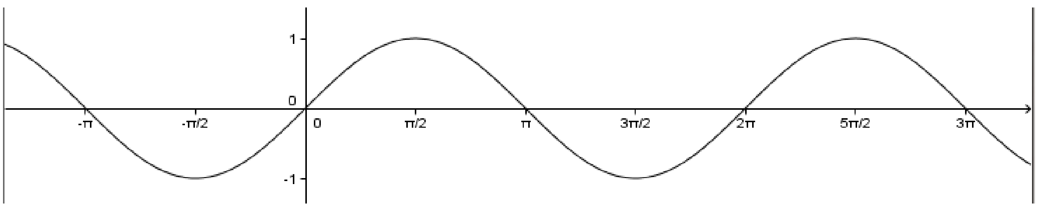
	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $(\cos)'(x)$	0	$-$		$-$	0
Variations de cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $(\sin)'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe du cosinus :



Courbe du sinus :



Remarque : On peut obtenir la courbe du sinus à partir de celle du cosinus par translation de vecteur $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\overrightarrow{i}$. Et réciproquement celle du cosinus depuis celle du sinus par translation de vecteur $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\overrightarrow{i}$

Propriété :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors $\cos u$ et $\sin u$ sont définies et dérivables sur I et : $(\cos u)'(x) = -\sin(u(x)) \times u'(x)$ et $(\sin u)'(x) = \cos(u(x)) \times u'(x)$.