Chapitre 02 Compléments sur les fonctions : Limites de Fonctions. Continuité. Dérivation

1 Limites

1.1 Définitions

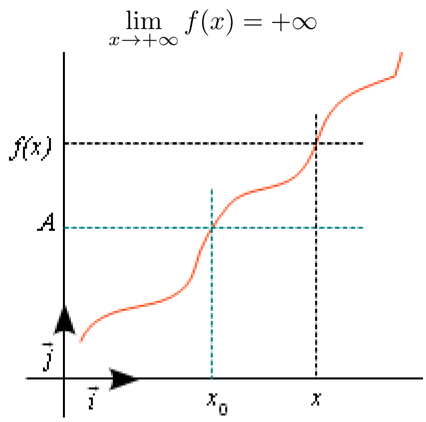
1.1.1 En l'infini

1.1.1.1 Limite infinie en l'infini

Exemple introductif : On considère la fonction : $f\ : x \mapsto x^2$.

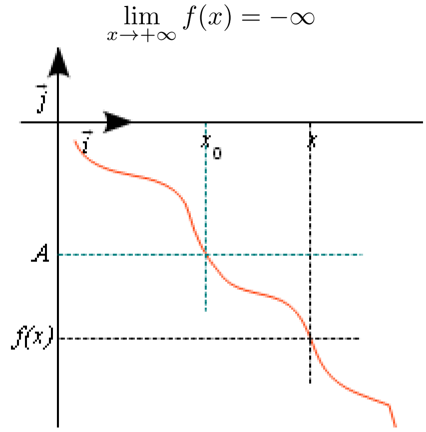
On a $f\ (10) = 100$, $f(100) = 10000$, $f(1000) = 10^6$...

Autrement dit les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes lorsque x croît ; on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment grand.



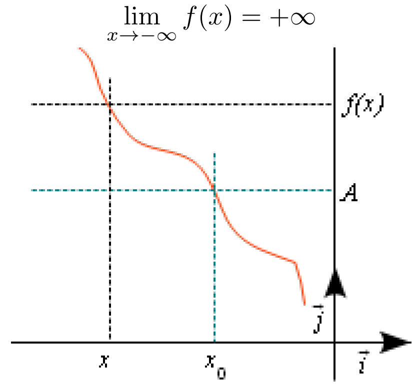
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\ ; +\infty[$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\ ; +\infty[$. Par définition : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$

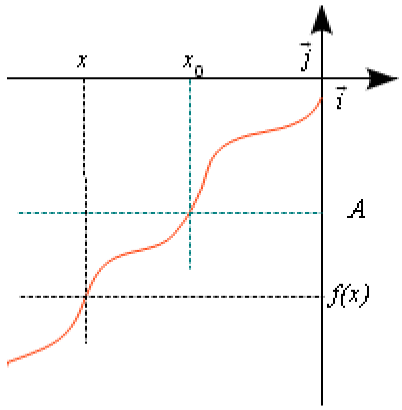
Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: $x \mapsto -x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto -\sqrt{x}$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,; a]$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x \leqslant x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers -∞ : $x \mapsto x^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,; a]$. Par définition : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} -f(x) = +\infty$

<u>Exemple :</u> Les fonctions suivantes ont pour limite -∞ quand x tend vers -∞ : $x \mapsto x^{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

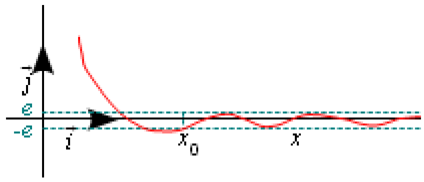
1.1.1.2 Limite finie en l'infini

<u>Exemple introductif :</u> On considère la fonction : $f \ : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On a $f\ (10) = 0,1,\ f(100) = 0,01,\ f(1000) = 0,001...$

Autrement dit les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus petites lorsque x croît ; on peut rendre $f(x)$ aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre des valeurs de x suffisamment grandes.

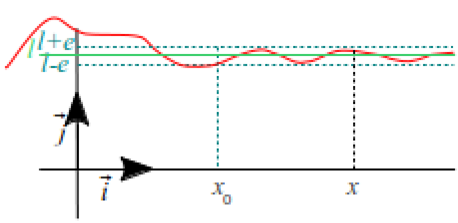
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,; +\infty[$. On dit que f admet pour limite 0 en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel ϵ, il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on a : $|f(x)| \leqslant \epsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

<u>Exemple :</u> Les fonctions suivantes ont pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$: $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

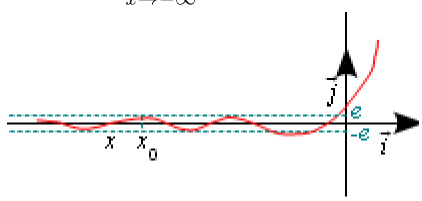
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,; +\infty[$. On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ si $f(x) - l$ a pour limite 0 en $+\infty$
On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

<u>Exemple :</u> Les fonctions suivantes ont pour limite l quand x tend vers $+\infty$: $x \mapsto \dfrac{1}{x^n} + l$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

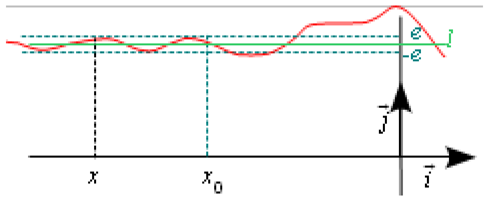
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,; a]$. On dit que f admet pour limite 0 en $-\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
Autrement dit, pour tout réel ϵ, il existe x_0 tel que pour tout $x \leqslant x_0$, on a : $|f(x)| \leqslant \epsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

<u>Exemple :</u> Les fonctions suivantes ont pour limite 0 quand x tend vers -∞ : $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$. On dit que f admet pour limite l en $-\infty$ si $f(x) - l$ a pour limite 0 en $-\infty$
On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite l quand x tend vers -∞ :
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} + l$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.2 Limite en a

1.1.2.1 Limite infinie en a

Remarque : On ne se pose la question que dans le cas où la fonction n'est pas définie en a. Autrement dit a est une borne du domaine de définition de la fonction. On se place alors toujours du même côté.

Exemple introductif : On considère la fonction : $f \ : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$.

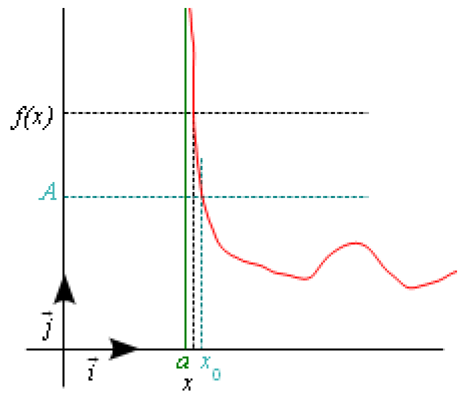
On a $f\ (2,1) = 10,\ f(2,01) = 100,\ f(2,001) = 1000...$

Autrement dit les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 2 par valeurs supérieures à 2 ; on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre des valeurs de x suffisamment proches de 2 par valeurs supérieures.

On a $f\ (1,9) = -10,\ f(1,99) = -100,\ f(1,999) = -1000...$

Autrement dit les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus négativement grandes lorsque x se rapproche de 2 par valeurs inférieures à 2 ; on peut rendre $f(x)$ aussi négativement grand que l'on veut à condition de prendre des valeurs de x suffisamment proches de 2 par valeurs inférieures.

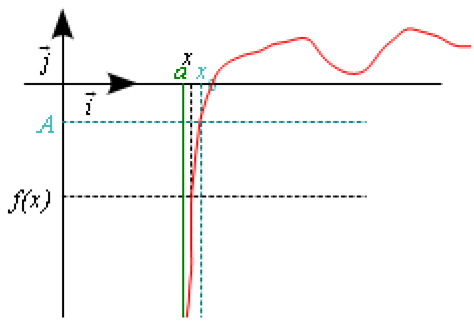
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,;b]$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeurs supérieures si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure (respectivement inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur supérieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$)

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[b\,;\,;a[$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeurs inférieures si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure (respectivement inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur inférieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$
Illustration à faire ...
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$
Illustration à faire ...

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

1.1.2.2 Limite finie en a

Remarque : On ne se pose la question que dans les cas suivants pour une fonction f et un réel a :
- soit f n'est pas définie en a mais où a est une borne du domaine de définition de f. On se place alors toujours du même côté de a.
- soit f est définie en a.

Exemple introductif : On considère la fonction : $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash 2$

$f(1,9) = 4,9$ $f(1,99) = 4,99$ $f(1,999) = 4,999$
Il semble donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 5$.
$f(2,1) = 5,1$ $f(2,01) = 5,01$ $f(2,001) = 5,001$
Il semble donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 5$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b\,;\,;c[$. Soit a un élèment de $]b\,;\,c[$, éventuellement l'une de ses bornes (dans ce cas on précisera si l'on tend par valeurs supérieures ou inférieures).
On dit que f admet pour limite 0 en a (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a tout en restant dans $]b\,;\,;c[$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0$)

Exemple : $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)^2 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \sqrt{x+2} = 0$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b\,;\,;c[$. Soit a un élèment de $]b\,;\,c[$, éventuellement l'une de ses bornes (dans ce cas on précisera si l'on tend par valeurs supérieures ou inférieures).
On dit que f admet pour limite l en a (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) si $f(x) - l$ admet pour limite 0 en a.
On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$)

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1} (x+1)^2 = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x+2} = 2$.

1.1.3 Asymptotes

Asymptote verticale : La droite d'équation $x = k$ est asymptote verticale à la courbe d'une fonction f, si f n'est pas définie en k et si f admet une limite infinie en k (par valeurs supérieures ou inférieures)

Exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

Asymptote oblique (hors programme) : La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote verticale à la courbe en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction f définie sur un intervalle du type $[c\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;c]$), si $f(x) - (ax+b)$ admet une limite nulle en $+\infty$ (resp $-\infty$).

Exemple : $x \mapsto 2x - 5 + \dfrac{1}{x-3}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 5$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Asymptote horizontale : La droite d'équation $y = b$ est asymptote verticale à la courbe en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction f définie sur un intervalle du type $[c\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;c]$), si f admet pour limite b en $+\infty$ (resp $-\infty$).

1.2 Opérations sur les limites

1.2.1 Somme de fonctions

Soit f et g deux fonctions.
On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit l et l' deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.2.2 Produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions.
On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit l et l' deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)\times g(x))$
l	l'	ll'
$l \neq 0$	$+\infty$	$\text{sgn}(l)\infty$
$l \neq 0$	$-\infty$	$\text{sgn}(-l)\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée

Exemple des fonctions polynômes :On considère $f(x) = 7x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = 5x^2 - 3x + 4$. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et g

La limite en $+\infty$ de f ne pose pas de problème, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour g on est face à une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on factorise par x^2 et on a : $g(x) = x^2\left(5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$. D'où comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 5$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

De manière générale, on retiendra le résultat suivant :

Théorème (admis) : La limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Remarque : Il faut cependant savoir factoriser dès que besoin... par exemple pour déterminer la limite en $+\infty$ de f définie par : $f(x) = x^2\sqrt{x} - x + 7$

1.2.3 Inverse de fonctions

Soit f une fonction.
On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit l un nombre réel.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
$l \neq 0$	$\dfrac{1}{l}$
0	Forme indéterminée
0 par valeurs supérieures	$+\infty$
0 par valeurs inférieures	$-\infty$
$\pm\infty$	0

1.2.4 Quotient de fonctions

Soit f et g deux fonctions.

Pour déterminer la limite de $\dfrac{f}{g}$, on écrit $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\dfrac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$.

Exemple des fonctions rationnelles :On considère $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+3}{5x^3+4x+2}$ là où elle existe. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

A priori, on est face à une forme indéterminée... pour lever l'indétermination on factorise numérateur et dénominateur : $f(x) = \dfrac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(5+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{x\left(5+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}$ et donc comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2} = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3} = 5$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De manière générale, on retiendra le résultat suivant :

> Théorème (admis) : La limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Sur l'exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{5x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5x} = 0$.

Remarque : Il faut cependant savoir factoriser dès que besoin... par exemple pour déterminer la limite en $+\infty$ de f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2}$.

1.2.5 Composition de fonctions

> Définition : Soit g une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J. Soit H une valeur définie sur l'intervalle J. On appelle fonction composée de g suivie de h la fonction$f$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = h(g(x))$. On note $f = h \circ g$.

> Théorème (admis) : Soit α, β et γ trois quantités désignant soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
> Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \beta$ et si $\lim\limits_{x\to\beta} h(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (h\circ g)(x) = \gamma$

Idée de preuve :Comme $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \beta$, lorsque x tend vers α, $g(x)$ se rapproche de β.

En posant $X = g(x)$, cela signifie que X se rapproche de β.

Comme $\lim\limits_{x\to\beta} h(x) = \gamma$, et lorsque x se rapproche de β, $h(x)$ se rapproche de γ. Donc $(h\circ g)(x) = h(X)$ qui se rapproche de γ et donc : $\lim\limits_{x\to\alpha} (h\circ g)(x) = \gamma$.

Exemple : On considère : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

On pose $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \sqrt{2}$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} (h\circ g)(x) = \sqrt{2}$.

1.3 Limites et ordre

1.3.1 Théorème d'encadrement

> Théorème des « gendarmes » : On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
> Soit f, g et h trois fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.
> Si de plus $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

Remarque : « x voisin de α » signifie si $\alpha = a$, « x proche de a », si $\alpha = +\infty$ « x suffisamment grand » et si $\alpha = -\infty$ « x suffisamment négativement grand »

Preuve : Par exemple pour $\alpha = +\infty$

Soit I un intervalle ouvert centré sur l.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ il existe A, tel que pour $x > A$, on a $g(x) \in I$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, il existe B, tel que pour $x > B$, on a $h(x) \in I$.

Il existe C tel que pour $x > C$, on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

Soit $D = \max(A, B, C)$. Pour $x > D$, on a : $f(x) \in I$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemple : On considère : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Etudier la limite de f en $+\infty$.
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, d'où pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

> Corollaire : On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$ et l un réel.
> Si pour « x voisin de α », on a : $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

Preuve : $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ équivaut à $l - g(x) \leqslant f(x) \leqslant l + g(x)$. Or comme $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to\alpha} l - g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} l + g(x) = l$. Donc d'après le théorème des « gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

1.3.2 Théorèmes de comparaison

> Théorème : On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
> Soit f et g deux fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $f(x) \leqslant g(x)$.
> Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l'$, alors $l \leqslant l'$

Preuve : Par exemple pour $\alpha = +\infty$.
Raisonnons par l'absurde.
On suppose que $l > l'$.
On pose $r = \dfrac{l - l'}{4}$ (faire un schéma pour expliquer le choix)
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, il existe A tel que pour $x > A$, on a : $f(x) \in]l - r\,; l + r[$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$, il existe B tel que pour $x > B$, on a : $g(x) \in]l' - r\,; l' + r[$.
Il existe C tel que pour $x > C$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$.
On note $D = \max(A, B, C)$
On a pour $x > D$, $g(x) < l' + r < l - r < f(x)$, ce qui contredit le fait que $f(x) \leqslant g(x)$.
On a donc $l \leqslant l'$.

> Théorème : On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
> Soit f et g deux fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $f(x) \leqslant g(x)$.
> – Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.
> – Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.

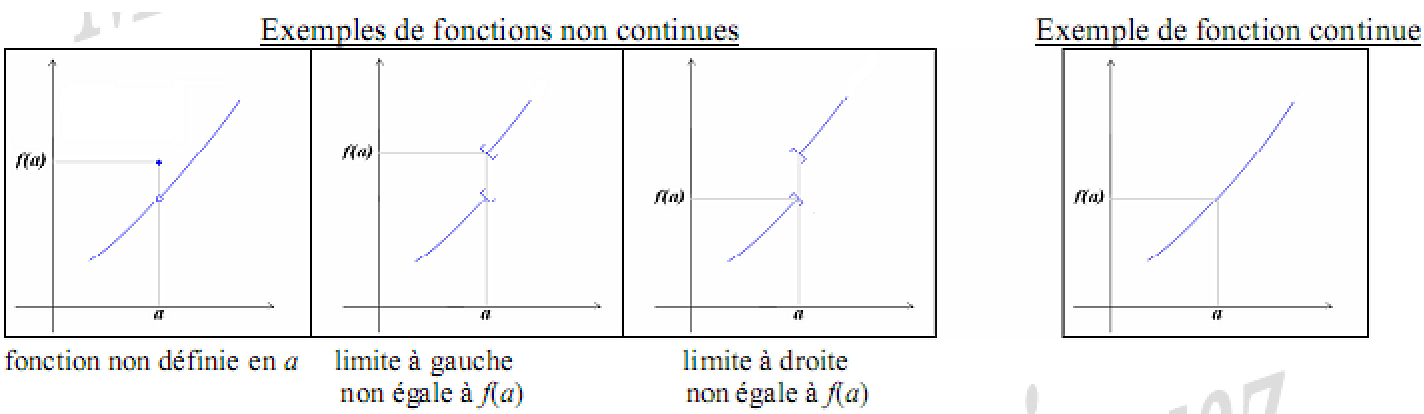
Preuve : Par exemple pour $\alpha = +\infty$.
Soit B un réel.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe A tel que pour $x > A$, on a : $f(x) > B$.
D'autre part, il existe un réel C, tel que pour $x > C$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$.
Soit $D = \max(A, C)$. Pour $x > D$, on a : $B < f(x) \leqslant g(x)$.
En résumé, pour tout réel B, il existe D tel que pour $x > D$, on a : $g(x) > B$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Preuve analogue pour le deuxième point
Exemple 1 :Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x^3(2 + \sin x)$
On a pour tout réel x, $\sin x \geqslant -1$, d'où : $2 + \sin x \geqslant 1$
Pour $x > 0$, on a donc comme $x^3 > 0$, $x^3(2 + \sin x) \geqslant x^3$ et donc comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Exemple 2 :Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$.
Pour $x > 0$, on a : $x^3 + x^2 > x^2$ et $\sqrt{x^2} = x$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

> Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. Soit I un intervalle inclus dans D_f. Soit $a \in I$.
> On dit que f est continue en a si f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.

En pratique : f est continue en a se traduit graphiquement par le fait que la courbe de f pour x proche de a est obtenue sans « lever le crayon ».
Remarque :Si f n'est pas définie en a, f ne peut pas être continue en a.
Etre défini en a est donc une condition nécessaire pour que f soit continue en a.
Exemple et contre-exemples :



2.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. Soit I un intervalle inclus dans D_f.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Propriété : La somme, le produit et la composée de fonctions continues sur un intervalle I inclus dans leur domaine de définition sont continues sur I.
Le quotient de deux fonctions continues sur I est continue sur I privé des points où le quotient n'est pas défini.

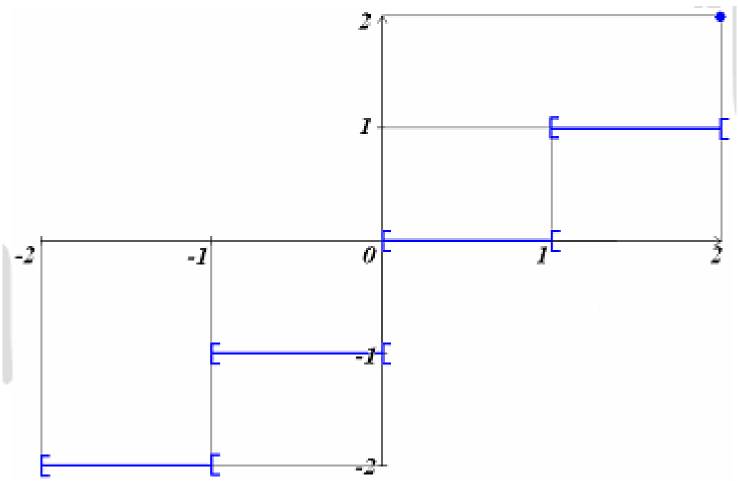
Preuve : Utiliser la définition de la continuité et les propriétés sur les limites.

Propriété : Les fonctions polynômes, cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des domaines où elles sont définies.

Exemple de la fonction partie entière :

Définition : La fonction partie entière, notée E, est la fonction qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur à x.

Exemples :$E(4,3) = 4$, $E(-3,2) = -4$, $E(11) = 11$.



Propriété :La fonction partie entière est continue sur tout intervalle $[n\,; n+1[$, où : $n \in \mathbb{Z}$.
La fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Globalement la fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

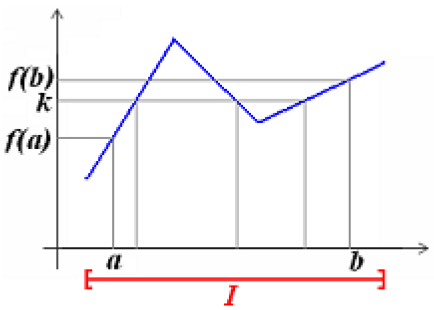
Preuve : Pour $x \in [n\,; n+1[$, la fonction partie entière est constante et vaut n, elle est continue comme fonction constante (par morceaux).
$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n - 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n$. E n'admet pas de limite en $n \in \mathbb{Z}$. Donc E n'est pas continue en n.

Remarque :On a vu qu'être défini en a était une condition nécessaire pour être continue en a. Par contre, l'exemple de la fonction partie entière nous montre qu'être défini en a n'est pas une condition suffisante pour être continue en a.

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (admis) : Soit f une fonction définie et continue sur I. Soit a et b deux éléments de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque :Autrement dit chacune des valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise au moins une fois.



Corollaire (dit théorème de la bijection) : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.
f réalise alors une bijection de $[a\,;\,b]$ sur $[f(a)\,;\,f(b)]$ou $[f(b)\,;\,f(a)]$

Preuve : On suppose par exemple que f est strictement croissante sur $[a\,;\,b]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Soit $a \leqslant x < c$, comme f est strictement croissante sur $[a\,;\,b]$, $f(x) < f(c) = k$
Soit $c < x \leqslant b$, comme f est strictement croissante sur $[a\,;\,b]$, $k = f(c) < f(x)$.
Donc c est l'unique réel solution sur $[a\,;\,b]$ de $f(x) = k$.
Remarques :
– Ce corollaire est encore valable sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non.
Dans ce cas $f(a)$ et $f(b)$ deviennent éventuellement $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
Par exemple, si $I = [a\,;\,+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pour tout réel $k \geqslant f(a)$, il existe un unique $c \geqslant a$, tel que $f(c) = k$.
– Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
  – tout réel de I admet une image par f dans J ;
  – tout réel de J admet un unique antécédent dans I.
– Un cas particulier intéressant du corollaire du TVI : Si une fonction continue strictement monotone change de signe sur un intervalle I, alors elle s'annule exactement une fois sur cet intervalle.
  On peut traduire cela différemment : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple : Chercher le nombre de solutions de $x^4 - 2x^2 + 0,5 = 0$
$f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 0,5$
f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
On a : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
D'où le tableau de variation :

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-0,5$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	$-0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

f étant continue sur $\mathbb{R}$ et comme f est strictement monotone sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$,... et change de signe sur chaque intervalle, cette équation admet quatre solutions sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On convient désormais que dans les tableaux de variations, les flèches obliques représentent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On pourra donc se référer directement au tableau de variation pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.

3 Dérivation

3.1 Nombre dérivé (Rappels de 1S)

3.1.1 Nombre dérivé

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I, qui ne soit pas une borne. Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a. On appelle alors nombre dérivé en a la valeur de la limite de ce taux d'accroissement, que l'on note $f'(a)$. Autrement dit, si f est dérivable en a, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

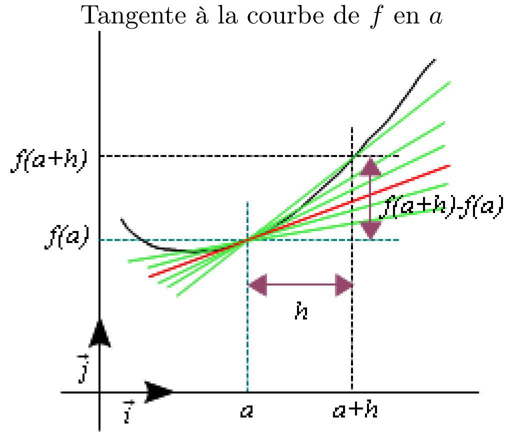
Définition : Avec les mêmes hypothèses, l'ensemble des nombres a pour lesquels $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, est appelé domaine de dérivabilité de f.

3.1.2 Tangente en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I tel que f soit dérivable en a. On appelle tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété : La tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Tangente à la courbe de f en a



3.1.3 Approximation affine

Propriété-Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction ϕ telle que pour tout réel h tel que $a+h \in I$, on a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$.
On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a .
Autrement dit pour x proche de : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$

Preuve : Voir cours de 1S.

3.2 Dérivée et sens de variation (Rappels de 1S)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit D le domaine de dérivabilité de f .

Définition : La fonction, notée f', qui à tout $x \in D$, associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f sur D .

Théorème :
Soit un intervalle J inclus dans D.
Si f est croissante sur J, alors pour tout $x \in J$, $f'(x) \geqslant 0$.
Si f est décroissante sur J, alors pour tout $x \in J$, $f'(x) \leqslant 0$.
Si f est constante sur J, alors pour tout $x \in J$, $f'(x) = 0$.

Preuve : Voir cours de 1S.

Théorème réciproque (admis) (principe de Lagrange) :
Soit un intervalle J inclus dans D.
Si pour $x \in J$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur J.
Si pour $x \in J$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur J.
Si pour $x \in J$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur J.
De plus, si, pour $x \in J$, $f'x) > 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur J.
De plus, si, pour $x \in J$, $f'x) < 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur J.

Notion d'extremum local :

Définition :
Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.
On dit que $f(a)$ est un minimum local (respectivement un maximum local) de la fonction f sur I, lorsque $f(a)$ est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans I et contenant a.
f admet un extremum local si elle admet un minimum ou un maximum local.

Théorème :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple : $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

Théorème réciproque :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 0$.

3.3 Calcul de dérivées

3.3.1 Dérivée des fonctions usuelles (Rappels de 1S)

Fonction f	Domaine de définition de f	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbf{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$

3.3.2 Opération sur les dérivées

3.3.2.1 Dérivée d'une somme (Rappels de 1S)

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors la somme de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(u + v)' = u' + v'$

3.3.2.2 Dérivée d'une multiplication par un scalaire (Rappels de 1S)

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' . Soit k un réel.
Alors la fonction ku est dérivable sur J et on a : $(ku)' = ku'$

3.3.2.3 Dérivée d'un produit (Rappels de 1S)

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors le produit de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(uv)' = u'v + v'u$

3.3.2.4 Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient (Rappels de 1S)

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, avec v ne s'annulant pas sur J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors l'inverse de la fonction v est dérivable et : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Alors le quotient de u par v est dérivable sur J et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

3.3.2.5 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (non exigible) :
Soit v une fonction dérivable sur J, de fonction dérivée v'.
Soit u une fonction dérivable sur I, telle que$u(I) \subset J$, de fonction dérivée u'.
Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a pour $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Cas particuliers importants :
Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.
- Alors u^n est dérivable sur I, et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- Si de plus u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$
- Si u est une fonction strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Soit a et b deux réels, alors $v(x) = u(ax+b)$ est dérivable pour tout x tel que $ax+b \in I$ et $v'(x) = a \times u'(ax+b)$.

3.4 Dérivabilité et continuité

Théorème :
Soit f une fonction définie sur un domaine D. Soit I un intervalle inclus dans D. Soit $a \in I$
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Preuve : Dire que f est dérivable en a, signifie que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
On pose pour $x \neq a$: $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
On a : $f(x) = f(a) + (x - a)\tau(x)$
Comme $\lim\limits_{x \to a} x - a = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \tau(x) = f'(a)$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et donc f est continue en a.$\square$
Attention ! La réciproque est fausse.
Par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.