Chapitre 1 Récurrence, Suites et limites.

1 Convergence d'une suite

1.1 Généralités

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et a pour limite l si pour tout intervalle ouvert contenant l, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle.
Autrement dit, une suite est convergente de limite l, lorsque les termes de la suite approchent d'aussi près que l'on veut le réel l pour n suffisamment grand.

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et a pour limite l ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n \in]l-\epsilon\,;\,l+\epsilon[$.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$

Soit $\epsilon > 0$, $\dfrac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\epsilon}$

Soit N le premier entier supérieur à $\dfrac{1}{\epsilon}$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n \in]-\epsilon\,;\,+\epsilon[$. Et donc (u_n) est convergente de limite 0.

Suivant le même principe, on montre que $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ convergent et ont pour limite 0.

Remarques : (i) Dans le cas d'une suite convergente, il y a donc un nombre fini de termes en dehors de l'intervalle $]l-\epsilon\,;\,l+\epsilon[$.
(ii) Cela revient à écrire que :
« pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. »
Autrement dit que : « l'inégalité $|u_n - l| < \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »
(ii) Cela revient aussi à dire que :
« la double inégalité : $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang. »

Propriété : Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente de limite l, alors l est unique.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) convergente admette deux limites l_1 et l_2, avec $l_1 \neq l_2$.
On pose $\epsilon = |l_1 - l_2|$. On a $\epsilon > 0$, car $l_1 \neq l_2$.
Comme (u_n) est convergente de limite l_1, il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a : $|u_n - l_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Comme (u_n) est convergente de limite l_2, il existe N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a : $|u_n - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Donc, pour $n \geqslant N = \max(N_1\,;\,N_2)$: $\epsilon = |l_1 - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, contradiction.
Donc $l_1 = l_2$.$\square$

Notation : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente de limite l. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;\,+\infty[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;\,B[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n > A$.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet pour limite $-\infty$ si et seulement si pour tout $B < 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n < B$.

Exemple : $u_n = \sqrt{n}$.
Soit $A > 0$. $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$. Soit N le premier entier naturel supérieur à A^2. Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n > A$.
On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

1.2 Opérations sur les limites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n>0$	0 avec $u_n<0$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$\dfrac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.3 Comparaison de suites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $|u_n - l| \leqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Preuve : Soit N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on a : $|u_n - l| \leqslant v_n$.
Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$: $|v_n| < \epsilon$.
Soit $N = \max(N_1\,;\,N_2)$. Pour $n \geqslant N$, on a : $|u_n - l| \leqslant v_n < \epsilon$, et donc $u_n \in]l-\epsilon\,;\,l+\epsilon[$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.□

Propriété : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives l et l', alors $l \leqslant l'$.

Preuve : Soit N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on a : $u_n \leqslant v_n$.
Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$: $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, il existe N_3 tel que pour $n \geqslant N_3$: $l'-\epsilon < v_n < l'+\epsilon$.
Soit $N = \max(N_1\,;\,N_2\,;\,N_3)$. Pour $n \geqslant N$, on a : $l-\epsilon < u_n \leqslant v_n < l'+\epsilon$ et donc $l \leqslant l'$.□

Propriété : Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente de limite l et croissante, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.

Preuve :Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe n_0, tel que $u_{n_0} > l$, alors pour tout $p > n_0$, on aurait $u_p > l$.
Soit m un réel tel que $u_p > m > l$. Soit $I =]l-(m-l)\,;\,l+(m-l)[=]2l-m\,;\,m[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe N tel que pour tout $n > N$ $u_n \in I$, puisque I est un intervalle ouvert centré sur l. Donc pour $n > max(n_0, N)$, on a contradiction.
D'où le résultat.

Théorème (dit des gendarmes) (admis) : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_2}$ trois suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de limites l, alors (v_n) est convergente et admet pour limite l.

Preuve (à titre d'information) : Soit N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$: $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, il existe N_3 tel que pour $n \geqslant N_3$: $l-\epsilon < w_n < l+\epsilon$.
Soit $N = \max(N_1\,;\,N_2\,;\,N_3)$. Pour $n \geqslant N$, on a : $l-\epsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < l+\epsilon$ et donc (v_n) est convergente et admet pour limite l.□

Exemple : Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Pour $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Et donc comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$.
(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : (i) Soit N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on a : $u_n \leqslant v_n$.
Soit $A > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$: $A < u_n$.
Soit $N = \max(N_1\,;\,N_2)$. Pour $n \geqslant N$, on a : $A < u_n \leqslant v_n$ et donc (v_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Preuve analogue$\square$
Exemple :Calculer la limite de (u_n) où $u_n = n^2(2 - \cos n)$
On a : $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, d'où : $1 \leqslant 2 - \cos n \leqslant 3$ et donc $n^2 \leqslant u_n \leqslant 3n^2$.
Par suite, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1.4 Cas des suites arithmétiques et géométriques (rappels)

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison a.
Si $a > 0$, alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si $a < 0$, alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : On a : $u_n = u_0 + na$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et que :
si $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} an = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
si $a < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} an = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.$\square$

Théorème :On considère la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(i) Si $q > 1$, alors (q^n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(ii) Si $q = 1$, alors (q^n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
(iii) Si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
(iv) Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) diverge.

Preuve : On note $u_n = q^n$.
(i) Soit $q > 1$.
On considère pour $n \geqslant 2$, la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx).$$

Pour $x \geqslant 0$, on a : $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$, et donc $f'(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. En particulier, $f(0) = 0$.
Comme $q - 1 > 0$, on a : $f(q - 1) \geqslant f(0)$ et donc : $q^n \geqslant 1 + n(q - 1)$.
Donc puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(ii) Immédiat, car (u_n) est constante.
(iii) Soit $0 < q < 1$. On pose $q' = \dfrac{1}{q}$. On a : $q' > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q'^n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si $q = 0$, la suite est constante à partir de u_1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_1 = 0$.
Soit $-1 < q < 0$. On pose $q' = |q|$. On a : $0 < q' < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q'^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q'^n = \lim\limits_{n\to+\infty} -q'^n = 0$. Or : $-q'^n \leqslant q^n \leqslant q'^n$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
(iv) Les valeurs de q^n sont alternativement dans $]-\infty\,;\,-1]$ et dans $[1\,;\,+\infty[$. Donc la suite ne peut admettre ni $+\infty$, ni $-\infty$ comme limites.
Si la suite admet l comme limite, alors tout intervalle ouvert contenant l, contiendrait un nombre infini de valeurs de la suite à partir d'un certain rang. Soit I un tel intervalle, alors I contiendrait à la fois des nombres inférieurs à -1 et d'autres supérieurs à 1. Donc I serait au moins de longueur 2. Ce qui n'est pas le cas de tous les intervalles, par exemple : $]l - 0,5\,;\,l + 0,5[$. Donc la suite ne converge pas vers l, et donc elle est divergente.$\square$

1.5 Cas des suites du type...

1.5.1 $u_n = f(n)$

Théorème : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que : $u_n = f(n)$, où f est définie sur $[n_0\,;\,+\infty[$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$, où c est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, alors :
– si c est un réel, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
– si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

Preuve : Assez naturel, on passe au discret...$\square$

1.5.2 $u_n = f(v_n)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur I. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que tout les éléments à partir d'un certain rang $n_1$sont dans I. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite telle que : $u_n = f(v_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$, où a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$
– si c est un réel, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
– si c est $+\infty$ ou $-\infty$, (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

Preuve : Admis$\square$

1.6 Cas des suites monotones

1.6.1 Vocabulaire

Définition : Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Soit m et M deux réels.
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :
– majorée par M si pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant M$
– minorée par m si pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \geqslant m$
– bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples : La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+2}$ est minorée par $\sqrt{2}$ mais n'est pas majorée.
La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sin n$ est bornée.
La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{n}$ est également bornée.
La suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = (-2)^n$ n'est ni minorée, ni majorée.

1.6.2 Etude de la convergence

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante et majorée converge.
(ii) Toute suite décroissante et minorée converge.

Preuve (principe et non exigible) : (i) Soit (u_n) une suite croissante et majorée par un nombre M. Alors (admis) l'ensembe des majorants de (u_n) admet un plus petit élément, noté M_0 (l'existence de ce plus petit majorant est une propriété admise de $\mathbb{R}$).
Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M_0 - \epsilon < u_{n_0} \leqslant M_0$ (sinon M_0 n'est pas le plus petit majorant...). Et donc, comme (u_n) est croissante, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]M_0 - \epsilon\,; M_0]$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, (u_n) converge et est de limite M_0.
(ii) Preuve analogue.$\square$

Théorème (admis) : (i) Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
(ii) Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve : (i) Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit $A > 0$, comme (u_n) n'est pas majorée, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.
Et donc comme ceci est valable pour tout $A > 0$, (u_n) diverge et admet comme limite $+\infty$.
(ii) Preuve analogue.$\square$
Remarque : Il existe des suites non croissantes qui ont pour limite $+\infty$ (par exemple $u_n = n(2 + \cos n)$). Le théorème précédent donne une condition suffisante pour qu'une suite admette comme limite $+\infty$, qui n'est pas une condition nécessaire. Idem pour le premier théorème du paragraphe (prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}(2 + \cos n)$ qui converge vers 0 mais qui n'est pas monotone)