Echantillonnage et estimation
Terminale ES

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules
rouges connue.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

★ Proportion p de boules rouges connue.

★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

★ Proportion p de boules rouges connue.

★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.

★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.

★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :

★ Proportion p de boules rouges connue.

★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.

★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.

★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation => paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation
=> paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.
✦ Domaine de l'estimation et de l'intervalle de confiance

Soit deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules rouges et noires.
On effectue n tirages avec remise.
Deux situations bien différentes :

Dans l'urne U_1 :
★ Proportion p de boules rouges connue.
★ Observation de la fréquence d'apparition de la boule rouge, F_n.
★ F_n appartient en général à un intervalle de fluctuation de centre p, dont la précision augmente avec n.
★ Domaine de l'échantillonnage et de l'intervalle de fluctuation
=> paragraphe 1

Dans l'urne U_2 :
✦ Proportion de boules rouges inconnue a priori.
✦ Tentative d'estimation à partir de la fréquence observée de la proportion de boules rouge.
✦ Estimation faite à partir d'un intervalle de confiance.
✦ Domaine de l'estimation et de l'intervalle de confiance
=>paragraphe 2

Plan du cours

1. Echantillonnage
2. Estimation

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Pour n grand, on a vu que l'on peut admettre que X_n soit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Pour n grand, on a vu que l'on peut admettre que X_n soit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

On a vu que pour $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$ suivant la loi normale centrée réduite : $P(-1,96 \leqslant Z_n \leqslant 1,96) \approx 0,95$.

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Pour n grand, on a vu que l'on peut admettre que X_n soit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

On a vu que pour $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$ suivant la loi normale centrée réduite : $P(-1,96 \leqslant Z_n \leqslant 1,96) \approx 0,95$.

Ce qui revient à $P(-1,96 \leqslant \dfrac{X_n - \mu}{\sigma} \leqslant 1,96) \approx 0,95,$

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Pour n grand, on a vu que l'on peut admettre que X_n soit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
On a vu que pour $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$ suivant la loi normale centrée réduite : $P(-1,96 \leqslant Z_n \leqslant 1,96) \approx 0,95$.
Ce qui revient à $P(-1,96 \leqslant \dfrac{X_n - \mu}{\sigma} \leqslant 1,96) \approx 0,95,$
ou encore à : $P(\mu - 1,96\sigma \leqslant X_n \leqslant \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.
Alors $P\left(\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95$.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.

Alors $P\left(\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95$.

Or $\dfrac{\mu}{n} = p$ et $\dfrac{\sigma}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.

Alors $P\left(\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95.$

Or $\dfrac{\mu}{n} = p$ et $\dfrac{\sigma}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

On note $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.

Alors $P\left(\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95.$

Or $\dfrac{\mu}{n} = p$ et $\dfrac{\sigma}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

On note $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

Alors, pour n grand $P\left(F_n \in I_n\right)$ est voisine de 0,95.

On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspondant à la fréquence de succès.

Alors $P\left(\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95.$

Or $\dfrac{\mu}{n} = p$ et $\dfrac{\sigma}{n} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

On note $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

Alors, pour n grand $P\left(F_n \in I_n\right)$ est voisine de 0,95.

Définition

$I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$ *est appelé un intervalle de fluctuation asymptotique de* F_n *avec la probabilité 0,95 (ou au seuil de 95%)*

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$.

Soit F_n *la fréquence dans un échantillon de taille* n.
Si I_n *est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :*
- si $F_n \in I_n$ *: on accepte l'hypothèse au seuil de risque de 5%.*
- si $F_n \notin I_n$ *: on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut* p *au seuil de risque de 5 %.*

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$*,* $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*.*

Prise de décision à partir d'un échantillon :
On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p*.*

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Soit F_n *la fréquence dans un échantillon de taille* n.

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Soit F_n *la fréquence dans un échantillon de taille* n.

Si I_n *est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :*

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Soit F_n *la fréquence dans un échantillon de taille* n.

Si I_n *est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :*

- si $F_n \in I_n$ *: on accepte l'hypothèse au seuil de risque de 5%.*

Remarque

Cette approximation est valable dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$.

Prise de décision à partir d'un échantillon :

On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse qu'un caractére a la proportion p.

Soit F_n *la fréquence dans un échantillon de taille* n.

Si I_n *est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors la règle de décision est la suivante :*

- si $F_n \in I_n$ *: on accepte l'hypothèse au seuil de risque de 5%.*

- si $F_n \notin I_n$ *: on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut* p *au seuil de risque de 5 %.*

Plan du cours

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.
Soit F_n la variable aléatoire donnant la fréquence de succès.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.
Soit F_n la variable aléatoire donnant la fréquence de succès.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
F_n peut-être considéré comme un estimateur de p.

On considère une expérience de Bernoulli dont on ne connaît pas la probabilité de succés p (ni celle de l'échec !)
On désire estimer au mieux la probabilité p à partir de n expériences indépendantes.
Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès au bout des n expériences.
Soit F_n la variable aléatoire donnant la fréquence de succès.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
F_n peut-être considéré comme un estimateur de p.
Jusqu'à quel point est-ce fiable ? Quelle est la marge d'erreur ?

Définition

On appelle intervalle de confiance au niveau 0,95 pour l'estimation de p *l'intervalle noté* I_C *tel que :* $P\left(p \in I_C\right) \geqslant 0,95$

Définition

On appelle intervalle de confiance au niveau 0,95 pour l'estimation de p l'intervalle noté I_C tel que : $P\left(p \in I_C\right) \geqslant 0,95$

Propriété

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors pour tout $p \in]0\,;\,1[$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Preuve

Montrons que

$$K_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset$$

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = J_n.$$

Preuve

Montrons que

$$K_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = J_n.$$

Cela revient à montrer que $1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ *pour* $p \in [0\,;\,1]$.

Soit $g\ :\ p \mapsto p(1-p)$ g *est dérivable sur* $[0\,;\,1]$ *et* $g'(p) = 1 - 2p$.

$g'(p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geqslant p$. *Et donc* g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$. *Donc sur* $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\dfrac{1}{2}$. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. *Et ainsi* $1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1,96\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 0,98$.

Preuve

Montrons que
$K_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] \subset$
$\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = J_n.$
Cela revient à montrer que $1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ *pour* $p \in [0\,;\,1]$.
Soit $g\ :\ p \mapsto p(1-p)$ g *est dérivable sur* $[0\,;\,1]$ *et* $g'(p) = 1 - 2p$.
$g'(p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geqslant p$. *Et donc* g *est croissante sur* $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ *et* *décroissante sur* $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$. *Donc sur* $[0\,;\,1]$, g *atteint son maximum en* $\dfrac{1}{2}$. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. *Et ainsi* $1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1,96\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 0,98$.
Ainsi, $P\left(F_n \in K_n\right) \leqslant P\left(F_n \in J_n\right)$ *et donc :* $0,95 \leqslant P\left(F_n \in J_n\right)$

Propriété

Lorsque n est assez grand (c.à.d. pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), l'intervalle $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \, ; \, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de p. I_C est appelé intervalle de confiance pour p au niveau asymptotique 95%.

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C$.

$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P(p \in I_C) > 0,95.$ $\square$

Propriété

Lorsque n *est assez grand (c.à.d. pour* $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*), l'intervalle* $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de* p. I_C *est appelé intervalle de confiance pour* p *au niveau asymptotique* 95%.

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *:*
$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Propriété

Lorsque n est assez grand (c.à.d. pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), l'intervalle $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de p. I_C est appelé intervalle de confiance pour p au niveau asymptotique 95%.

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$:

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C.$

Propriété

Lorsque n *est assez grand (c.à.d. pour* $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$*), l'intervalle* $I_C = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \, ; \, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *est un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'estimation de* p. I_C *est appelé intervalle de confiance pour* p *au niveau asymptotique* 95%.

Preuve

D'après la propriété précédente, il existe n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *:*
$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \leqslant p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \Leftrightarrow p \in I_C.$

$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P(p \in I_C) > 0,95.$ $\square$