Logarithme népérien

Terminale ES

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

Plan du cours

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout x *dans* $]0\,;+\infty[$*, l'équation* $e^y = x$*, d'inconnue* y*, admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$*. Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x*.*

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout x *dans* $]0\,;+\infty[$, *l'équation* $e^y = x$, *d'inconnue* y, *admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$. *Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x.

La fonction $\exp : t \mapsto e^t$ *est définie, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout x *dans* $]0\,;+\infty[$*, l'équation* $e^y = x$*, d'inconnue* y*, admet une unique solution, que l'on note* $\ln x$*. Ainsi* $\ln x$ *est le nombre dont l'exponentielle est* x*.*

John Napier (1550-1617)
(dit Néper en France)

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x *de* $]0\,;\,+\infty[$, *associe le réel* $\ln x$ *dont l'exponentielle est* x.

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0\,;+\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x.

Conséquences

(i) Pour tout $x > 0$ *:* $e^{\ln x} = x$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:* $\ln e^{x} = x$
(iii) $\ln 1 = 0$
(iv) $\ln e = 1$

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à tout x de $]0\,;+\infty[$, associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x.

Conséquences

(i) Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln e^{x} = x$
(iii) $\ln 1 = 0$
(iv) $\ln e = 1$

Preuve

(i) découle de la définition
(ii) $\ln e^{x}$ *est le seul réel dont l'exponentielle est* e^{x}, *c'est à dire* x.
(iii) $\ln 1 = \ln e^{0} = 0$
(iv) $\ln e = \ln e^{1} = 1 \square$

Théorème

Soit $x > 0$ *et* $y \in \mathbb{R}$.

$y = \ln x$ *équivaut à* $x = e^y$

Théorème

Soit $x > 0$ *et* $y \in \mathbb{R}$.
$y = \ln x$ *équivaut à* $x = e^y$

Preuve

Si $y = \ln x$ *alors* $e^y = e^{\ln x} = x$
Si $e^y = x$ *alors comme* $x > 0$, $\ln e^y = \ln x$ *ou encore* $y = \ln x$ $\square$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln ab = \ln a + \ln b$

Théorème

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$*, on a :* $\ln ab = \ln a + \ln b$

Preuve

La fonction exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ *sur* $]0\,;\,+\infty[$.
De plus $a > 0$*, il existe donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, un unique réel* x *tel que* $e^x = a$*. Ce qui équivaut à* $x = \ln a$
De même $b > 0$*, il existe donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, un unique réel* y *tel que* $e^y = b$*. Ce qui équivaut à* $y = \ln b$
On a : $\ln ab = \ln e^x e^y = \ln e^{x+y} = x + y = \ln a + \ln b$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ *et* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, *on a :* $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$ *et* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Preuve

$0 = \ln 1 = \ln\left(\dfrac{1}{b} \times b\right) = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) + \ln b$. *D'où :* $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$.

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\square$

Propriété admise

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété admise

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :* $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *, on a :* $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Propriété admise

Pour tout réel $a > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, on a :* $\ln(a^n) = n \ln a$

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ *, on a :* $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$*.*

Preuve

Pour $a > 0$, $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2 \ln \sqrt{a}$*, d'où l'égalité.*

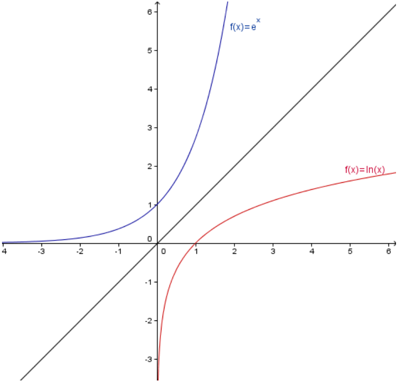
Plan du cours

Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.

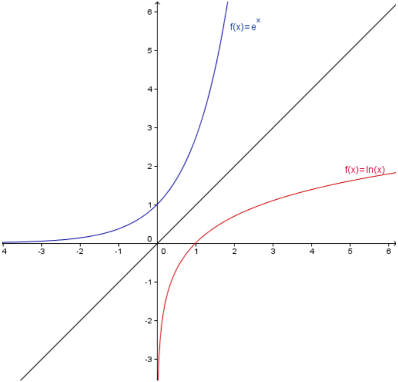
Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Théorème

La courbe de la fonction logarithme népérien est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à celle de l'exponentielle.



Preuve

Voir activité□

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Preuve

Soit $0 < u < v$. *On a donc :* $0 < e^{\ln u} < e^{\ln v}$ *et donc comme la fonction exponentielle est strictement croissante on a :* $\ln u < \ln v$ *et donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;\,+\infty[$.$\square$

Conséquences

Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

$\ln a = \ln b$ *ssi* $a = b$;

$\ln a < \ln b$ *ssi* $a < b$;

$\ln a > 0$ *ssi* $a > 1$;

$\ln a < 0$ *ssi* $0 < a < 1$.

Conséquences

Soit a *et* b *deux réels strictement positifs. On a :*

$\ln a = \ln b$ *ssi* $a = b$;

$\ln a < \ln b$ *ssi* $a < b$;

$\ln a > 0$ *ssi* $a > 1$;

$\ln a < 0$ *ssi* $0 < a < 1$.

Preuve

Cela découle directement de la stricte croissance du logarithme népérien. $\square$

Propriété admise

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété admise

La fonction $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété admise

La fonction $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$Signe\,de\ \ln'(x)$		$+$	1	$+$	
$Variations\,de\ \ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation :

	0		1		$+\infty$
$Signe\ de\ \ln'(x)$		$+$	1	$+$	
$Variations\ de\ \ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique : Voir le début de paragraphe

Propriété admise

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives.

Alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété admise

Soit u *une fonction dérivable sur un intervalle* I *et à valeurs strictement positives.*

Alors la fonction $\ln \circ u$ *est dérivable sur* I *et* $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété admise

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *admet pour primitive :* $F : x \mapsto \ln|x| + c$, *avec* $c \in \mathbb{R}$.