Lois de probabilité continues

Terminale ES

X. OUVRARD

Enseignant au Lycée International de Ferney-Voltaire

Plan du cours

Plan du cours

Plan du cours

Définition

Soit I un intervalle.

On dit que f est une fonction densité sur un intervalle I si :

1. f est continue sur I ;

2. f est positive sur I ;

3. L'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses vaut 1 : $\int_I f(t)dt = 1$.

Exemple

Chercher α tel que $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0\,;\,1]$

Résolution :

On a : $\int_0^1 (x+\alpha)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha$; on veut $\frac{1}{2} + \alpha = 1$

d'où : $\alpha = \frac{1}{2}$.

On a donc $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

On vérifie que f est continue sur $[0\,;\,1]$ et que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

Exemple

Chercher α tel que $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0\,;\,1]$

Résolution :

On a : $\int_0^1 (x+\alpha)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha$; on veut $\frac{1}{2} + \alpha = 1$

d'où : $\alpha = \frac{1}{2}$.

On a donc $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

On vérifie que f est continue sur $[0\,;\,1]$ et que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

Exemple

Chercher α tel que $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0\,;\,1]$

<u>Résolution :</u>

On a : $\int_0^1 (x+\alpha)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha$; on veut $\frac{1}{2} + \alpha = 1$

d'où : $\alpha = \frac{1}{2}$.

On a donc $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

On vérifie que f est continue sur $[0\,;\,1]$ et que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

Exemple

Chercher α tel que $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0\,;\,1]$

Résolution :

On a : $\int\limits_0^1 (x+\alpha)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} + \alpha$; on veut $\dfrac{1}{2} + \alpha = 1$

d'où : $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

On a donc $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$.

On vérifie que f est continue sur [0 ; 1] et que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

Propriété

Soit f une fonction densité sur I.
L'application P qui à tout sous-intervalle $[a\,;\,b]$ de I associe le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ définit une loi de probabilité sur I.
On dit alors que f est la densité de la loi de probabilité P.

Remarques : (i) Si $I = [m\,;\,M]$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_m^M f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si $I = [m\,;\,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_m^x f(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Même principe si $I =]-\infty\,;\,M]$.

Propriété

Soit f une fonction densité sur I.
L'application P qui à tout sous-intervalle $[a\,;\,b]$ de I associe le nombre $\int_a^b f(t)dt$ définit une loi de probabilité sur I.
On dit alors que f est la densité de la loi de probabilité P.

Remarques : (i) Si $I = [m\,;\,M]$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_m^M f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si $I = [m\,;\,+\infty[$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_m^x f(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Même principe si $I =]-\infty\,;\,M]$.

Propriété

Soit f une fonction densité sur I.
L'application P qui à tout sous-intervalle $[a\,;\,b]$ de I associe le nombre $\int_a^b f(t)dt$ définit une loi de probabilité sur I.
On dit alors que f est la densité de la loi de probabilité P.

Remarques : (i) Si $I=[m\,;\,M]$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t=\int_m^M f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si $I=[m\,;\,+\infty[$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_m^x f(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Même principe si $I=]-\infty\,;\,M]$.

Propriété

Soit f une fonction densité sur I.
L'application P qui à tout sous-intervalle $[a\,;\,b]$ de I associe le nombre $\int_a^b f(t)dt$ définit une loi de probabilité sur I.
On dit alors que f est la densité de la loi de probabilité P.

Remarques : (i) Si $I = [m\,;\,M]$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_m^M f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si $I = [m\,;\,+\infty[$, alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_m^x f(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Même principe si $I =]-\infty\,;\,M]$.

Plan du cours

Définition

On considère une expérience aléatoire et un univers Ω, muni d'une probabilité.
Une variable aléatoire continue X définie sur Ω est telle qu'à chaque issue de Ω on peut associer un nombre réel quelconque d'un intervalle I.

Exemple

Une entreprise fabrique des piles.
X la variable aléatoire associant à chaque pile sa durée de vie en heures
Cette variable aléatoire est continue.

Définition

On considère une expérience aléatoire et un univers Ω, muni d'une probabilité.
Une variable aléatoire continue X définie sur Ω est telle qu'à chaque issue de Ω on peut associer un nombre réel quelconque d'un intervalle I.

Exemple

Une entreprise fabrique des piles.
X la variable aléatoire associant à chaque pile sa durée de vie en heures
Cette variable aléatoire est continue.

Propriété

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I. Soit P une loi de probabilité sur I, de densité f.
Alors on dit que X suit la loi de probabilité P, si pour tout intervalle J inclus dans I, on a : $P(X \in J) = \int_J f(t)dt$.

Remarques

(i) Si $J = [a\,; b]$ tel que $a \leqslant b$, on note
$P(X \in [a\,; b]) = P(a \leqslant X \leqslant b)$

Propriété

Soit X *une variable aléatoire à valeurs dans* I*. Soit* P *une loi de probabilité sur* I*, de densité* f*.*
Alors on dit que X *suit la loi de probabilité* P*, si pour tout intervalle* J *inclus dans* I*, on a :* $P(X \in J) = \int_J f(t)dt$*.*

Remarques

(i) Si $J = [a\,;\,b]$ *tel que* $a \leqslant b$*, on note*
$P(X \in [a\,;b]) = P(a \leqslant X \leqslant b)$

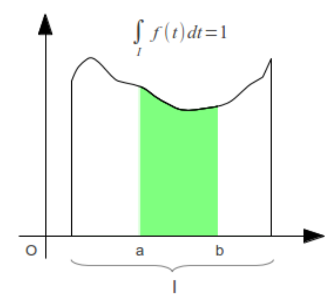
Remarques

(ii) $P(a \leqslant X \leqslant b)$ *correspond à l'aire comprise entre la courbe de la densité* f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$.

Autrement dit $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$

Remarques

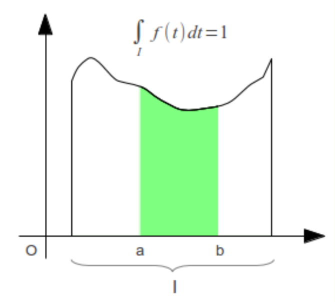
(ii) $P(a \leqslant X \leqslant b)$ *correspond à l'aire comprise entre la courbe de la densité* f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$.



Autrement dit $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$

Remarques

(ii) $P(a \leqslant X \leqslant b)$ *correspond à l'aire comprise entre la courbe de la densité* f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$*.*



Autrement dit $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;
$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;
$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int\limits_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;

$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;

$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int\limits_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;

$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;

$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;

$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;

$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;
$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;
$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Remarques

(iii) $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1$ *(par définition de la densité)*

(iv) Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$.

(v) $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$;

$P(X \leqslant a) = P(X < a)$;

$P(X \geqslant a) = P(X > a)$.

(vi) $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$

Définition

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P, de densité f
On appelle fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leqslant x)$, pour tout $x \in I$

Propriété

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P, de densité f, de fonction de répartition F.
Soit a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.
Alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P, de densité f
On appelle fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leqslant x)$, pour tout $x \in I$

Propriété

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I suivant une loi de probabilité P, de densité f, de fonction de répartition F.
Soit a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.
Alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

Plan du cours

Plan du cours

Définition

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
On appelle loi uniforme sur $[m\,;\,n]$ la loi ayant pour densité la fonction f telle que : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-m} & \text{si}\, m \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$ alors la fonction de répartition associée à cette variable aléatoire est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x < m \\ \dfrac{x-m}{n-m} & \text{si}\, m \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{si}\, x > n \end{cases}$$

Définition

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
On appelle loi uniforme sur $[m\,;\,n]$ la loi ayant pour densité la fonction f telle que : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-m} & \text{si } m \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$ alors la fonction de répartition associée à cette variable aléatoire est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ \dfrac{x-m}{n-m} & \text{si } m \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Propriété

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$ alors :
$P(m \leqslant X \leqslant x) = \dfrac{x-m}{n-m}$.

Preuve

$$P(m \leqslant X \leqslant x) = \int_m^x f(t)dt = \int_m^x \frac{1}{n-m}dt = \left[\frac{t}{n-m}\right]_m^x = \frac{x}{n-m} - \frac{m}{n-m} = \frac{x-m}{n-m}$$

Définition

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$, on définit son espérance par : $E(X) = \int_m^n tf(t)dt$.

Dans ce cas, on a : $E(X) = \dfrac{m+n}{2}$.

Preuve

$E(X) = \int_m^n \dfrac{t}{n-m}dt = \left[\dfrac{t^2}{2(n-m)}\right]_m^n = \dfrac{n^2-m^2}{2(n-m)} = \dfrac{(n-m)(n+m)}{2(n-m)} = \dfrac{n+m}{2}$.

Définition

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$, on définit son espérance par : $E(X) = \int_m^n tf(t)dt$.

Dans ce cas, on a : $E(X) = \dfrac{m+n}{2}$.

Preuve

$$E(X) = \int_m^n \frac{t}{n-m}dt = \left[\frac{t^2}{2(n-m)}\right]_m^n = \frac{n^2-m^2}{2(n-m)} = \frac{(n-m)(n+m)}{2(n-m)} = \frac{n+m}{2}.$$

Définition

Soit m et n deux réels distincts tels que $m < n$.
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[m\,;\,n]$, on définit son espérance par : $E(X) = \int\limits_m^n tf(t)dt$.

Dans ce cas, on a : $E(X) = \dfrac{m+n}{2}$.

Preuve

$E(X) = \int\limits_m^n \dfrac{t}{n-m}dt = \left[\dfrac{t^2}{2(n-m)}\right]_m^n = \dfrac{n^2-m^2}{2(n-m)} = \dfrac{(n-m)(n+m)}{2(n-m)} = \dfrac{n+m}{2}$.

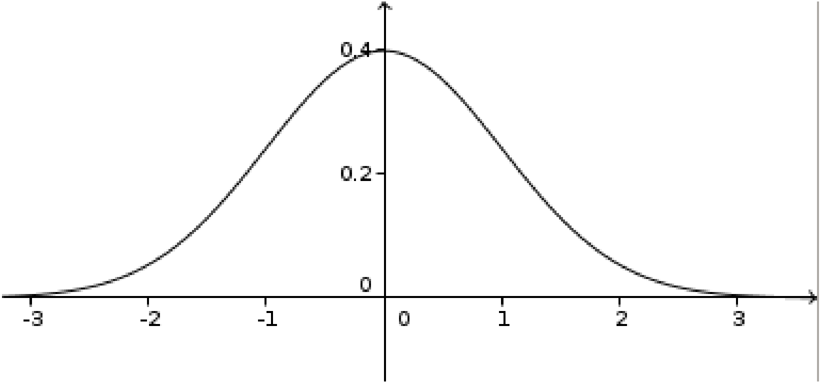
Plan du cours

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, *est la loi de densité la fonction* f *définie par :* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$*, est la loi de densité la fonction* f *définie par :* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.



Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$
(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.
(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$
(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.
(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$

(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.

(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.

(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$

(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.

(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.

(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$
(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.
(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Remarques

(i) $f(-t) = f(t)$. *La fonction* f *est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Preuve

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Remarques

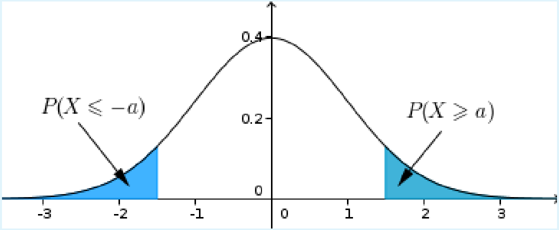
(i bis) $P(X \leqslant 0) = 0,5$
(ii) (Admis) L'aire sous la courbe vaut 1.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $E(X) = 0$.
(iv) (Admis) Si X *suit la loi normale centrée réduite, alors* $\sigma(X) = 1$.

Propriétés

(i) $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$

Propriétés

(i) $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$

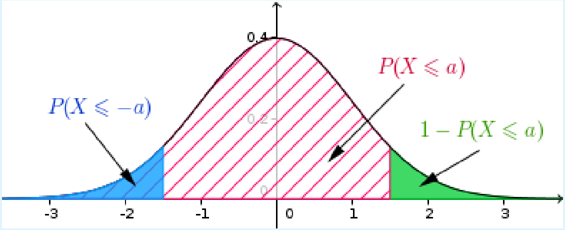


Propriétés

(ii) $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X \leqslant a)$

Propriétés

(ii) $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X \leqslant a)$



Propriétés

(iii) $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Preuve

$P(-a \leqslant X \leqslant a) = P(X \leqslant a) - P(X \leqslant -a) = P(X \leqslant a) - (1 - P(X \leqslant a)) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Propriétés

(iv) $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$

Propriétés

(iii) $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Preuve

$P(-a \leqslant X \leqslant a) = P(X \leqslant a) - P(X \leqslant -a) = P(X \leqslant a) - (1 - P(X \leqslant a)) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Propriétés

(iv) $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$

Propriétés

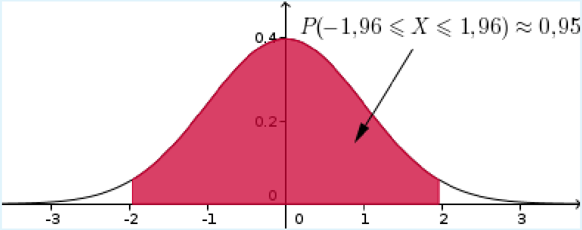
(iii) $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Preuve

$P(-a \leqslant X \leqslant a) = P(X \leqslant a) - P(X \leqslant -a) = P(X \leqslant a) - (1 - P(X \leqslant a)) = 2P(X \leqslant a) - 1$

Propriétés

(iv) $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$

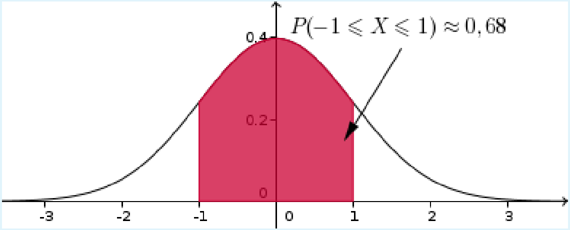


Propriétés

(v) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$

Propriétés

(v) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$



Plan du cours

Définition

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$*.*
La variable aléatoire X *d'univers* $\mathbb{R}$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *si la variable centrée réduite* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *associée suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$*.*

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *est la fonction* f *telle que*
$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$*.*
(ii) (Admis) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$*, donc la courbe de* f *est symétrique par rapport à la droite d'équation* $x = \mu$*.*
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$*, alors* $E(X) = \mu$ *et* $\sigma(X) = \sigma$*.*

Définition

Soit μ et σ deux nombres réels avec $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X d'univers $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si la variable centrée réduite $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ associée suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ est la fonction f telle que
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$
(ii) (Admis) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, donc la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
(iii) (Admis) Si X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$, alors $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Définition

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X *d'univers* $\mathbb{R}$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *si la variable centrée réduite* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *associée suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *est la fonction* f *telle que*
$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
(ii) (Admis) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, *donc la courbe de* f *est symétrique par rapport à la droite d'équation* $x = \mu$.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$, *alors* $E(X) = \mu$ *et* $\sigma(X) = \sigma$.

Définition

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$.
La variable aléatoire X *d'univers* $\mathbb{R}$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *si la variable centrée réduite* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *associée suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Remarques

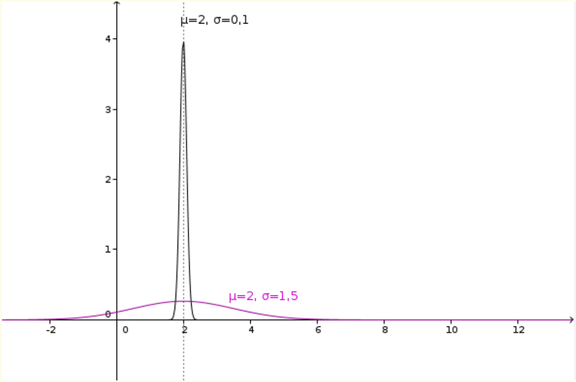
(i) La densité associée à une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ *est la fonction* f *telle que*
$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
(ii) (Admis) $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, *donc la courbe de* f *est symétrique par rapport à la droite d'équation* $x = \mu$.
(iii) (Admis) Si X *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$, *alors* $E(X) = \mu$ *et* $\sigma(X) = \sigma$.

Remarques

(iv) σ a une influence sur la forme de la courbe : plus σ est petit, plus les valeurs sont resserrées autour de μ et plus la "cloche" est haute.

Remarques

(iv) σ a une influence sur la forme de la courbe : plus σ est petit, plus les valeurs sont resserrées autour de μ et plus la "cloche" est haute.

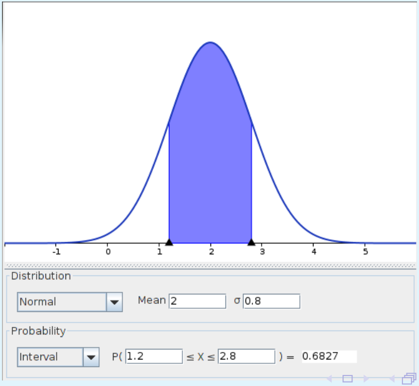


Propriété

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$*.*
Soit X *une variable aléatoire d'univers* $\mathbb{R}$ *suivant la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$*.*
Alors :
$P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]\right) \approx 0,683$

Propriété

Soit μ *et* σ *deux nombres réels avec* $\sigma > 0$.
Soit X *une variable aléatoire d'univers* $\mathbb{R}$ *suivant la loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$.
Alors :
$P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]\right) \approx 0,683$

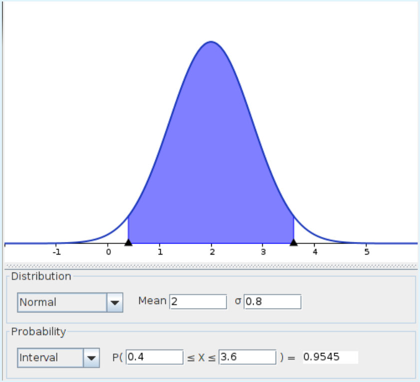


Propriété

$P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]\right) \approx 0,954$

Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]\right) \approx 0,954$$

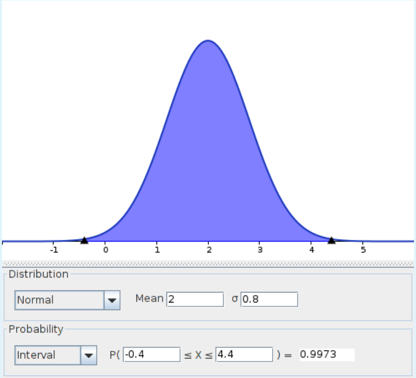


Propriété

$P\left(X \in [\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]\right) \approx 0,997$

Propriété

$$P\left(X \in [\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]\right) \approx 0,997$$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.*

Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$P(1 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,819$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

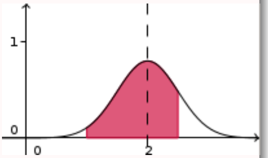
(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ NormCD(a, b, σ, μ)

TI$\rightarrow$ NormalFRép(a, b, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$P(1 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,819$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

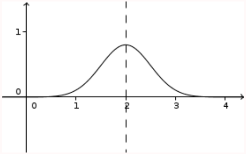
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

2. *Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.*



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

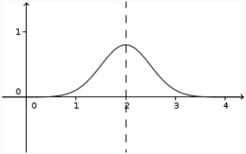
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

2. *Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.*

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

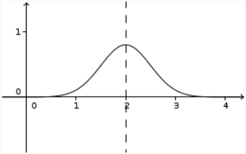
Résolution :

2. *Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.*

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(1,3 \leqslant X) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + P(X > 2) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + 0,5$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$</u>

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$

2. $P(1,3 \leqslant X)$

3. $P(X < 1,2)$

4. $P(X > 2,5)$

<u>*Résolution :*</u>

2. <u>*Problème :*</u> *la calculatrice ne sait calculer que :* $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

<u>*Résolution :*</u> *cf figure animée*

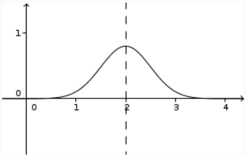
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(1,3 \leqslant X) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + P(X > 2) = P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) + 0,5$

A la calculatrice :

$P(1,3 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,419$ *, d'où :*

$P(1,3 \leqslant X) \approx 0,419 + 0,5 \approx 0,919$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

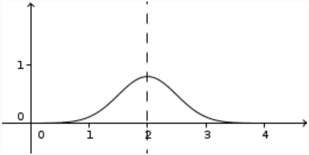
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

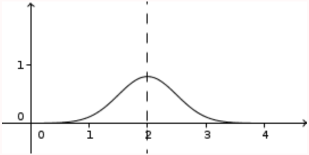
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. *Résolution : cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

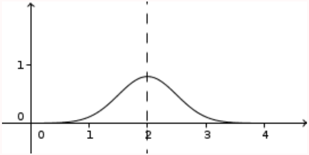
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. *Résolution :* cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X < 1,2) = P(X > 2) - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) = 0,5 - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2)$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

3. *Résolution :* *cf figure animée*

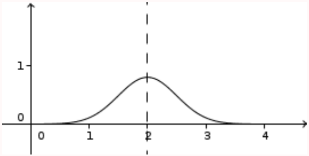
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X < 1,2) = P(X > 2) - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) = 0,5 - P(1,2 \leqslant X \leqslant 2)$

A la calculatrice :

$P(1,2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,445$,

d'où : $P(X < 1,2) \approx 0,5 - 0,445 \approx 0,055$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

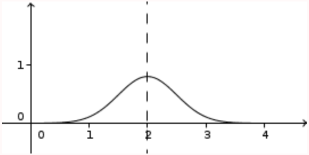
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. *Résolution : cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

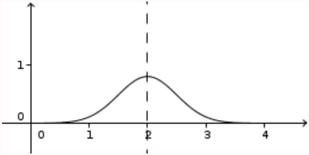
Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

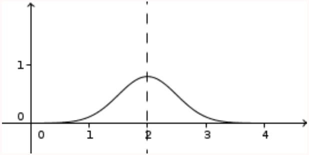
1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. *Résolution : cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > 2,5) = P(X \geqslant 2) - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) = 0,5 - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5)$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Calculer :

1. $P(1 \leqslant X \leqslant 2,5)$
2. $P(1,3 \leqslant X)$
3. $P(X < 1,2)$
4. $P(X > 2,5)$

Résolution :

4. Résolution : cf figure animée

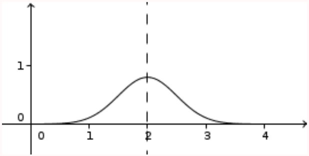
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > 2,5) = P(X \geqslant 2) - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) = 0,5 - P(2 \leqslant X \leqslant 2,5)$

A la calculatrice :

$P(2 \leqslant X \leqslant 2,5) \approx 0,341$,

d'où : $P(X > 2,5) \approx 0,5 - 0,341 \approx 0,159$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.*

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$

2. $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ InvNormCD(P, σ, μ)

TI$\rightarrow$ FracNormale(P, μ, σ)

Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

1. *La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.*

(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$
(ii) Casio $\rightarrow$ InvNormCD(P, σ, μ)
TI$\rightarrow$ FracNormale(P, μ, σ)
On trouve dans les deux cas :
$a \approx 2,421$

Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

<u>*Résolution :*</u>

1. La calculatrice sait calculer $P(X < a)$ pour X suivant $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

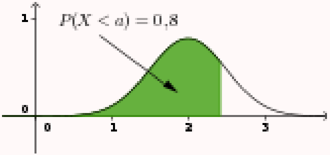
(i) On commence par calculer la valeur de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) Casio $\rightarrow$ InvNormCD(P, σ, μ)

TI$\rightarrow$ FracNormale(P, μ, σ)

On trouve dans les deux cas :

$a \approx 2,421$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

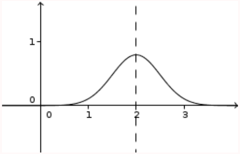
Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

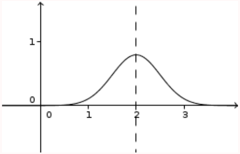
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$*</u>

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

<u>*Résolution :*</u>

2. <u>*Problème :*</u> *la calculatrice ne sait calculer que :* $P(X < b)$*.*

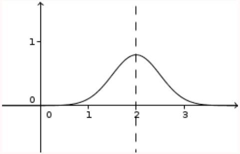
<u>*Résolution :*</u> *cf figure animée*

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(X > a) = 1 - P(X < a)$*, d'où :*

$P(X < a) = 1 - P(X > a) = 1 - 0,7 = 0,3$

On est ramené au cas précédent.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,6$

Résolution :

2. *Problème : la calculatrice ne sait calculer que : $P(X < b)$.*

Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

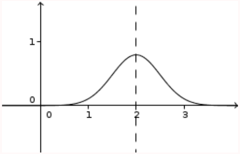
(ii) $P(X > a) = 1 - P(X < a)$, d'où :

$P(X < a) = 1 - P(X > a) =$

$1 - 0,7 = 0,3$

On est ramené au cas précédent.

A la calculatrice : $a \approx 1,738$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

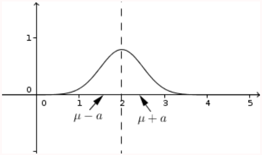
1. $P(X < a) = 0,8$ *2.* $P(X > a) = 0,7$

3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

Résolution :

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

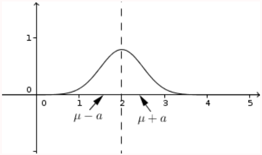
Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

Résolution :

3. *Résolution :* cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$



Savoir

<u>*Calculer une probabilité avec* $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$</u>

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(2; 0,25)$.

Trouver a *tel que :*

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

<u>*Résolution :*</u>

3. <u>*Résolution :*</u> *cf figure animée*

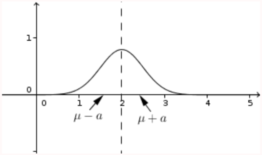
(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(\mu - a < X < \mu + a) = 2 \times P(\mu < X < \mu + a)$

D'où: $P(\mu < X < \mu + a) = 0,6 \div 2 = 0,3$

Or $P(X < \mu + a) = 0,5 + P(\mu < X < \mu + a) = 0,8$

et l'on se ramène au cas 1.



Savoir

Calculer une probabilité avec $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(2;0,25)$.

Trouver a tel que :

1. $P(X < a) = 0,8$
2. $P(X > a) = 0,7$
3. $P(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 0,6$

Résolution :

3. Résolution : cf figure animée

(i) Calcul de $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$

(ii) $P(\mu - a < X < \mu + a) =$

$2 \times P(\mu < X < \mu + a)$

D'où: $P(\mu < X < \mu + a) =$

$0,6 \div 2 = 0,3$

Or $P(X < \mu + a) =$

$0,5 + P(\mu < X < \mu + a) = 0,8$

et l'on se ramène au cas 1.

A la calculatrice : $\mu + a \approx 2,421$,

d'où :$a \approx 0,421$