Intégration

Terminale ES

X. OUVRARD

Lycée International

Plan du cours

Plan du cours

On muni le plan d'un repère orthogonal (0 ; I ; J)

Définition

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'intégrale de f entre a et b est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt$ (lu "intégrale de f de a à b") et est exprimé en unités d'aire ; l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ.
On pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

On muni le plan d'un repère orthogonal (0 ; I ; J)

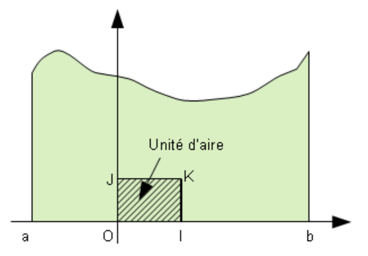
Définition

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'intégrale de f entre a et b est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt$ (lu "intégrale de f de a à b") et est exprimé en unités d'aire ; l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ.
On pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

On muni le plan d'un repère orthogonal (0 ; I ; J)

Définition

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'intégrale de f entre a et b est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

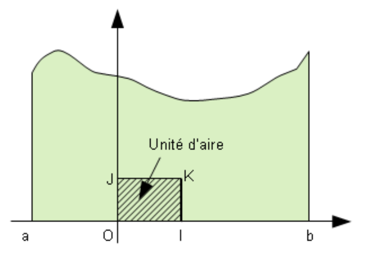


Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt$ (lu "intégrale de f de a à b") et est exprimé en unités d'aire ; l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ.
On pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

On muni le plan d'un repère orthogonal (0 ; I ; J)

Définition

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'intégrale de f entre a et b est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

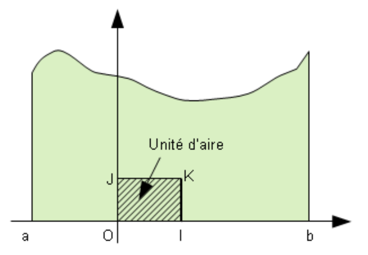


Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt$ (lu "intégrale de f de a à b") et est exprimé en unités d'aire ; l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ.
On pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

On muni le plan d'un repère orthogonal (0 ; I ; J)

Définition

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'intégrale de f entre a et b est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt$ (lu "intégrale de f de a à b") et est exprimé en unités d'aire ; l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ.
On pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

Exemple

Calculer l'intégrale de 0 à 2 de $f(x) = x$.

Résolution : f est continue et positive. L'intégrale de f entre 0 et 2 correspond à celle d'un triangle rectangle isocèle de côté 2. D'où :
$\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2\,\text{u.a.}$

Exemple

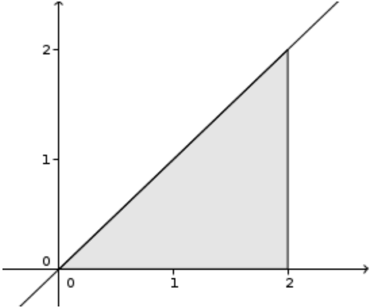
Calculer l'intégrale de 0 à 2 de $f(x) = x$.

<u>Résolution :</u> f est continue et positive. L'intégrale de f entre 0 et 2 correspond à celle d'un triangle rectangle isocèle de côté 2. D'où :
$\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2\,\text{u.a.}$

Exemple

Calculer l'intégrale de 0 à 2 de $f(x) = x$.

Résolution : f est continue et positive. L'intégrale de f entre 0 et 2 correspond à celle d'un triangle rectangle isocèle de côté 2. D'où :
$\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2\,\text{u.a.}$



Propriété

L'intégrale d'une fonction continue positive entre a et b, avec $a \leqslant b$, est positive.

Preuve

C'est une aire et une aire est toujours positive.

Propriété

Soit k un réel positif.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$,
$f(x) = k$.
Alors : $\int_a^b f(t)dt = k(b-a)$

Propriété

L'intégrale d'une fonction continue positive entre a et b, avec $a \leqslant b$, est positive.

Preuve

C'est une aire et une aire est toujours positive.

Propriété

Soit k un réel positif.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$,
$f(x) = k$.
Alors : $\int_a^b f(t)dt = k(b-a)$

Propriété

L'intégrale d'une fonction continue positive entre a et b, avec $a \leqslant b$, est positive.

Preuve

C'est une aire et une aire est toujours positive.

Propriété

Soit k un réel positif.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$,
$f(x) = k$.
Alors : $\int_a^b f(t)dt = k(b-a)$

Propriété

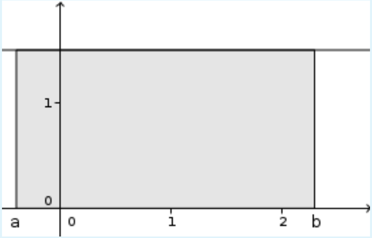
L'intégrale d'une fonction continue positive entre a et b, avec $a \leqslant b$, est positive.

Preuve

C'est une aire et une aire est toujours positive.

Propriété

Soit k un réel positif.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$,
$f(x) = k$.
Alors : $\int_a^b f(t)dt = k(b-a)$



Preuve

Si $k > 0$, l'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire du rectangle de côté k et de longueur $b - a$. Cette aire vaut $k(b - a)$.
Si $k = 0$, le rectangle est aplati et son aire vaut 0.

Théorème admis

Théorème fondamental de l'intégration :
Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I.
Soit a un réel de I.
Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et a pour dérivée f.

Preuve

Si $k > 0$*, l'intégrale de* f *entre* a *et* b *correspond à l'aire du rectangle de côté* k *et de longueur* $b - a$*. Cette aire vaut* $k(b - a)$*.*
Si $k = 0$*, le rectangle est aplati et son aire vaut 0.*

Théorème admis

Théorème fondamental de l'intégration :
Soit f *une fonction définie, continue et positive sur un intervalle* I*.*
Soit a *un réel de* I*.*
Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est dérivable sur* I *et a pour dérivée* f*.*

Plan du cours

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$.

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors f admet des primitives sur I.

Exemple

$x \mapsto x$ *admet pour primitive :* $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$.

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors f admet des primitives sur I.

Exemple

$x \mapsto x$ *admet pour primitive :* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$.

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors f admet des primitives sur I.

Exemple

$x \mapsto x$ *admet pour primitive :* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F sur I.
(i) Alors $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.
(ii) Soit G une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ (autrement dit deux primitives d'une fonction différent d'une constante).

Preuve

(i) On note : $G : x \mapsto F(x) + c$. G est dérivable sur I comme somme d'une fonction dérivable sur I et d'une constante. On a pour $x \in I$: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I.
(ii) $G - F$ est dérivable sur I et pour $x \in I$:
$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une constante c sur I et donc pour $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, d'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F sur I.
(i) Alors $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.
(ii) Soit G une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ (autrement dit deux primitives d'une fonction différent d'une constante).

Preuve

(i) On note : $G : x \mapsto F(x) + c$. G est dérivable sur I comme somme d'une fonction dérivable sur I et d'une constante. On a pour $x \in I$: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I.
(ii) $G - F$ est dérivable sur I et pour $x \in I$:
$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une constante c sur I et donc pour $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, d'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F sur I.
(i) Alors $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.
(ii) Soit G une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ (autrement dit deux primitives d'une fonction différent d'une constante).

Preuve

(i) On note : $G : x \mapsto F(x) + c$. G est dérivable sur I comme somme d'une fonction dérivable sur I et d'une constante. On a pour $x \in I$: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I.
(ii) $G - F$ est dérivable sur I et pour $x \in I$: $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une constante c sur I et donc pour $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, d'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F sur I.
(i) Alors $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.
(ii) Soit G une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ (autrement dit deux primitives d'une fonction différent d'une constante).

Preuve

(i) On note : $G : x \mapsto F(x) + c$. G est dérivable sur I comme somme d'une fonction dérivable sur I et d'une constante. On a pour $x \in I$: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I.
(ii) $G - F$ est dérivable sur I et pour $x \in I$:
$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une constante c sur I et donc pour $x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, d'où le résultat.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives sur I.
Soit $(x_0\,;\,y_0)$ un couple de réels, tel que $x_0 \in I$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Preuve

Soit G est une primitive de f sur I. Comme deux primitives de f sur I différent d'une constante, on va construire F tel que $F(x_0) = y_0$. Soit c tel que $G(x) = F(x) + c$ et $F(x_0) = y_0$, alors : $G(x_0) = F(x_0) + c$ et donc $c = G(x_0) - y_0$. Ainsi :
$F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.
F est bien une primitive de f et $F(x_0) = y_0$.$\square$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives sur I.
Soit $(x_0\,;\,y_0)$ un couple de réels, tel que $x_0 \in I$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Preuve

Soit G est une primitive de f sur I. Comme deux primitives de f sur I différent d'une constante, on va construire F tel que $F(x_0) = y_0$. Soit c tel que $G(x) = F(x) + c$ et $F(x_0) = y_0$, alors :
$G(x_0) = F(x_0) + c$ et donc $c = G(x_0) - y_0$. Ainsi :
$F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.
F est bien une primitive de f et $F(x_0) = y_0$.$\square$

Plan du cours

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, admettant sur I des primitives F et G. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors : (i) $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
(ii) λF est une primitive de λf sur I.

Propriété

Fontion f	*Primitive F*	*sur l'intervalle*
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{0\} & \text{si } n < -1 \\ \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, admettant sur I des primitives F et G. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors : (i) $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I
(ii) λF est une primitive de λf sur I.

Propriété

Fontion f	*Primitive F*	*sur l'intervalle*
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{si } n < -1 \\ \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = u'(x) \times g'(u(x))$, où g et u sont deux fonctions, définies et dérivables convenablement. Alors f admet comme primitive sur I, $F(x) = g(u(x)) + c$

.

Propriété

On obtient ainsi le tableau suivant, avec u fonction définie sur I

Fontion f	Primitive F	Remarques
$f = u'u^n \; n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} I \setminus \{x \,:\, u(x) = 0\} & si\, n < -1 \\ I & si\, n \geqslant 0 \end{cases}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + c$	$u > 0\, sur\, I$
$x \mapsto u(ax+b) \; (a \neq 0)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}U(ax+b) + c$	U primitive de u sur I
$f = u'e^u$	$F = e^u + c$	

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = u'(x) \times g'(u(x))$, où g et u sont deux fonctions, définies et dérivables convenablement. Alors f admet comme primitive sur I, $F(x) = g(u(x)) + c$

.

Propriété

On obtient ainsi le tableau suivant, avec u fonction définie sur I

Fontion f	*Primitive F*	*Remarques*
$f = u'u^n \;\; n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} I \backslash \{x \,:\, u(x) = 0\} & \text{si } n < -1 \\ I & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + c$	$u > 0$ *sur* I
$x \mapsto u(ax+b) \;\; (a \neq 0)$	$F(x) = \dfrac{1}{a} U(ax+b) + c$	U *primitive de* u *sur* I
$f = u'e^u$	$F = e^u + c$	

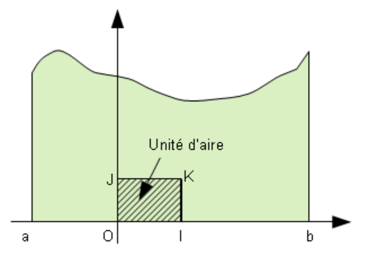
Plan du cours

Propriété

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I, de primitive F sur I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est le nombre $F(b) - F(a)$ exprimé en u.a. (l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ).
Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et appelé intégrale de f de a à b.

Propriété

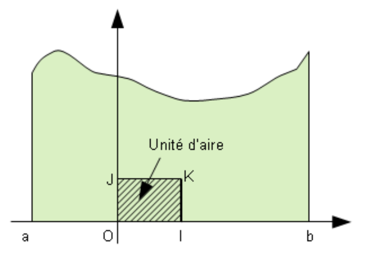
Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I, de primitive F sur I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est le nombre $F(b) - F(a)$ exprimé en u.a. (l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ).



Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et appelé intégrale de f de a à b.

Propriété

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I, de primitive F sur I.
Soit a et b appartenant à I, avec $a < b$.
Alors l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est le nombre $F(b) - F(a)$ exprimé en u.a. (l'unité d'aire correspondant à l'aire du rectangle OIKJ).



Ce nombre est noté : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et appelé intégrale de f de a à b.

Remarques

1. On a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
2. On note aussi $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
3. Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.

Remarques

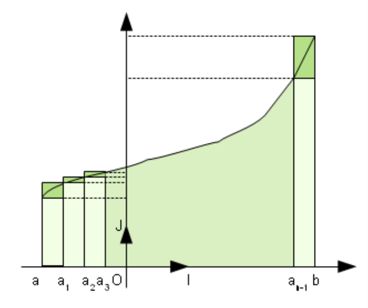
1. *On a* $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
2. *On note aussi* $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3. *Soit* f *une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle* $[a\,;\,b]$. *Soit* $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthogonal* $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.

Remarques

1. *On a* $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
2. *On note aussi* $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3. *Soit* f *une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle* $[a\,;\,b]$.
Soit $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthogonal* $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.



Remarques

Graphiquement, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire obtenue par les rectangles en dessous de la courbe et l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Lorsque le pas de la subdivision diminue, ces deux aires tendent vers la même valeur : celle de l'aire sous la courbe.

Dans le cas d'une fonction continue, positive et décroissante, l'encadrement est inversé.

On peut alors facilement généraliser cela à une fonction continue et positive.

4. On étend la notion d'intégrale à une fonction continue sur un intervalle I, avec a et b appartenant à I en posant $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Dans ce cas, cela ne représente plus l'aire sous la courbe...

Remarques

Graphiquement, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire obtenue par les rectangles en dessous de la courbe et l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Lorsque le pas de la subdivision diminue, ces deux aires tendent vers la même valeur : celle de l'aire sous la courbe.

Dans le cas d'une fonction continue, positive et décroissante, l'encadrement est inversé.

On peut alors facilement généraliser cela à une fonction continue et positive.

4. On étend la notion d'intégrale à une fonction continue sur un intervalle I, avec a et b appartenant à I en posant $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Dans ce cas, cela ne représente plus l'aire sous la courbe...

Remarques

Graphiquement, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire obtenue par les rectangles en dessous de la courbe et l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Lorsque le pas de la subdivision diminue, ces deux aires tendent vers la même valeur : celle de l'aire sous la courbe.

Dans le cas d'une fonction continue, positive et décroissante, l'encadrement est inversé.

On peut alors facilement généraliser cela à une fonction continue et positive.

4. *On étend la notion d'intégrale à une fonction continue sur un intervalle I, avec a et b appartenant à I en posant $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Dans ce cas, cela ne représente plus l'aire sous la courbe...*

Remarques

Graphiquement, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire obtenue par les rectangles en dessous de la courbe et l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Lorsque le pas de la subdivision diminue, ces deux aires tendent vers la même valeur : celle de l'aire sous la courbe.

Dans le cas d'une fonction continue, positive et décroissante, l'encadrement est inversé.

On peut alors facilement généraliser cela à une fonction continue et positive.

4. On étend la notion d'intégrale à une fonction continue sur un intervalle I, avec a et b appartenant à I en posant $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Dans ce cas, cela ne représente plus l'aire sous la courbe...

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On a :
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Preuve

$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

Théorème

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c de I.
On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Preuve

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) =$
$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On a :
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Preuve

$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

Théorème

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c de I.
On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Preuve

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) =$
$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On a :
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Preuve

$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

Théorème

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c de I.
On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Preuve

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) =$
$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On a :
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Preuve

$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

Théorème

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c de I.
On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Preuve

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) =$
$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

Théorème

Linéarité de l'intégrale
Soit f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a\,;\,b]$*. Soit* k *un réel.*
On a : (i) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
(ii) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Preuve

(i)$\int_a^b (f+g)(x)dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) =$
$F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$
$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
(ii)$\int_a^b kf(x)dx = (kF)(b) - (kF)(a) = kF(b) - kF(a) =$
$k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$

Théorème

Linéarité de l'intégrale
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit k un réel.
On a : (i) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
(ii) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Preuve

(i)$\int_a^b (f+g)(x)dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) =$
$F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$
$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
(ii)$\int_a^b kf(x)dx = (kF)(b) - (kF)(a) = kF(b) - kF(a) =$
$k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Preuve

Dans ce cas, $\int_a^b f(t)dt$ représente une aire, qui est donc positive. $\square$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Preuve

Dans ce cas, $\int_a^b f(t)dt$ représente une aire, qui est donc positive. $\square$

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Preuve

On applique la propriété précédente à $g - f$, qui est positive sur $[a\,;\,b]$ et on utilise la linéarité de l'intégrale. $\square$

Propriété

Soit f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a\,;\,b]$.
Si pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, *alors* $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Preuve

On applique la propriété précédente à $g - f$, *qui est positive sur* $[a\,;\,b]$ *et on utilise la linéarité de l'intégrale.* $\square$

Plan du cours

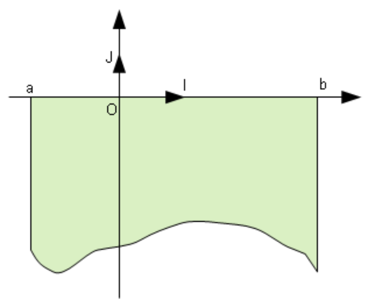
Plan du cours

Définition

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
L'aire du domaine D défini par : $\mathcal{D} = \{M(x\,;\,y)\ :\ a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ exprimé en unités d'aire est l'opposé de l'intégrale de a à b de f : $-\int_a^b f(t)dt = \int_a^b -f(t)dt$.

Définition

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
L'aire du domaine D défini par :
$\mathcal{D} = \{M(x\,;\,y)\ :\ a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ *exprimé en unités d'aire est l'opposé de l'intégrale de a à b de f :*
$-\int_a^b f(t)dt = \int_a^b -f(t)dt.$

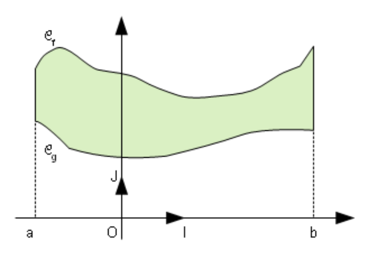


Propriété

Soit f et g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a\,;\,b]$, *avec* $g < f$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ *leur courbe représentative respective dans un repère orthogonal* $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
Alors l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, *les droites d'équation* $x = a$ et $x = b$ *est :* $\int_a^b (f-g)(t)dt$

Propriété

Soit f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a\,;\,b]$, *avec* $g < f$ *et* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *leur courbe représentative respective dans un repère orthogonal* $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
Alors l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$, *les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$ *est :* $\int_a^b (f-g)(t)dt$



Plan du cours

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ le réel m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Illustration : Dans le cas d'une fonction strictement positive, l'aire sous la courbe correspond à l'aire du rectangle hachuré.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ le réel m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

<u>Illustration :</u> Dans le cas d'une fonction strictement positive, l'aire sous la courbe correspond à l'aire du rectangle hachuré.