Fonctions exponentielles

1 Etude des fonctions exponentielles

Définition : Soit $q > 0$. On appelle fonction exponentielle de base q, notée $\exp_q$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_q : x \mapsto q^x$.

Remarque : Si $q = 1$, $\exp_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : La fonction exponentielle de base q transforme les sommes en produit. Autrement dit pour tous réels x et y, on a : $q^{x+y} = q^x q^y$

Conséquences : Soit q un réel strictement positif. Soit deux réels x et y. Soit n un entier relatif. On a :

- (i) $q^0 = 1$
- (ii) $q^{-y} = \dfrac{1}{q^y}$
- (iii) $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$
- (iv) $q^{nx} = (q^x)^n$

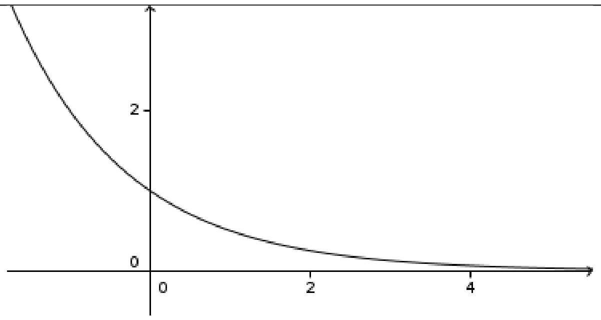
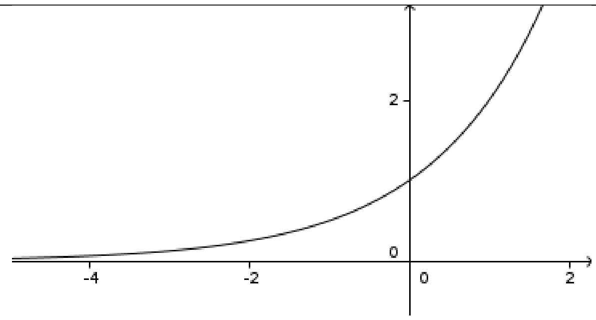
Preuve :
(i) $q^{0+0} = q^0 = q^0 \times q^0$, d'où $q^0(1 - q^0) = 0$, donc $q^0 = 0$ ou $q^0 = 1$. Or $q^0 \neq 0$ sinon pour tout x, on aurait $q^x = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc $q^0 = 1$.

(ii) $q^0 = q^{y-y} = q^y q^{-y}$, donc $q^{-y} = \dfrac{1}{q^y}$.

(iii) $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^{-y}}$.

(iv) Admise

Propriété (admise) :La fonction $\exp_q$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

<table>
<tr><td>Lorsque $0 < q < 1$</td><td>Lorsque $q > 1$</td></tr>
<tr><td>La fonction $\exp_q$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td>La fonction $\exp_q$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td></td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $\exp_q'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>Variations de $\exp_q$</td><td>$+\infty$ ↘ 0</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $\exp_q'(x)$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>Variations de $\exp_q$</td><td>0 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Remarques : (i) La fonction $\exp_q$ et q^n ont même limite en $+\infty$.
(ii) La fonction $\exp_q$ et q^n ont même sens de variation.
(iii) Toutes les fonctions exponentielles de base q passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ et par le point de coordonnées $(1\,;\,q)$.

Propriété (admise) :La fonction $\exp_q$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2 Un cas particulier fondamental

2.1 Définitions. Propriétés

Théorème (admis)-Définition : Il existe une unique valeur du réel q telle que la tangente en 0 de la courbe de la fonction $\exp_q$ ait pour coefficient directeur 1.
Autrement dit il existe une unique valeur de q tel que le nombre dérivé en 0 de $\exp_q$ soit 1.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base e, elle est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$

Conséquences : Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\exp(1) = \mathrm{e}$; ce nombre s'appelle le nombre d'Euler. On retiendra que c'est un nombre irrationnel et que l'on a $e \approx 2,718$.

- $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

2.2 Etude de la fonction exponentielle

Théorème : La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \mathrm{e}^x$.

Preuve : $\dfrac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \dfrac{\mathrm{e}^x \left(\mathrm{e}^h - 1\right)}{h} = \mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$. Or par définition, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$. Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x$ et donc la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' x = \mathrm{e}^x$. Par conséquent, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp' x = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Soit a et b deux réels.
(i) $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$
(ii) $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

Preuve : (i) C'est une traduction de la stricte croissance
(ii) Si $a = b$, alors $e^a = e^b$, par traduction de la stricte croissance.
En partant de $e^a = e^b$,
– si on suppose que $a < b$, alors $e^a < e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction
– si on suppose que $a > b$, alors $e^a > e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction
donc $a = b$.

Conséquence :$e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

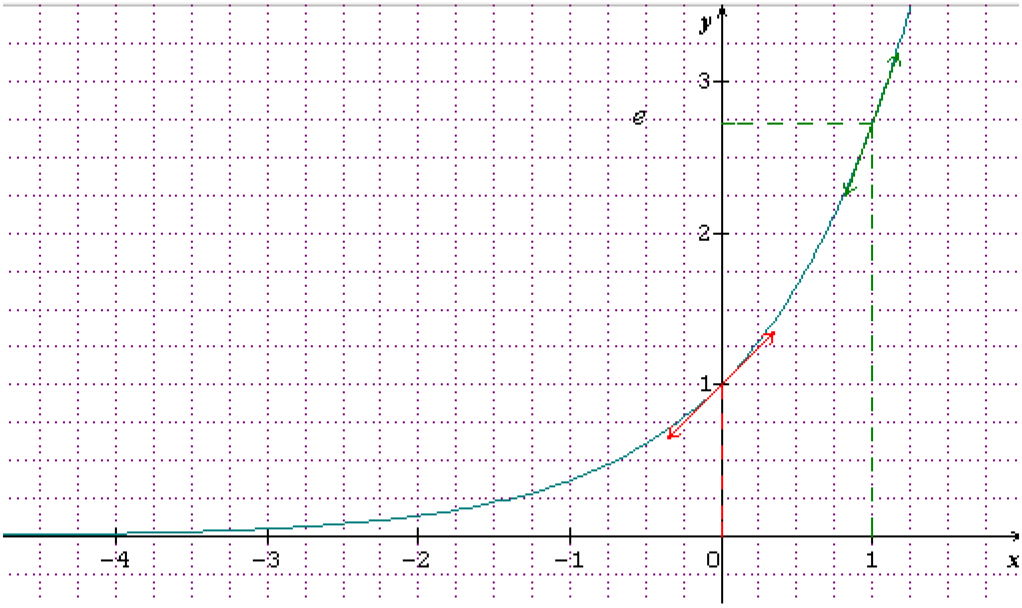
Preuve : On pose $g(x) = e^x - x$. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$ et donc $g'(x) \geqslant 0$ ssi $e^x \geqslant 1$ ssi $x \geqslant 0$. Donc pour $x \geqslant 0$, g est croissante et donc $g(x) \geqslant g(0)$ pour $x \geqslant 0$, ou encore $g(x) \geqslant 1 > 0$. Donc pour $x \geqslant 0$, on a $e^x > x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

On pose $X = -x$. On a $e^x = e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^X = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Tableau de variation :

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de $x \mapsto e^x$:



Propriété : La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Preuve :$\exp''(x) = e^x > 0$, donc la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété (admise) :Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction $f : x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction $f : x \mapsto \exp(u(x))$ a le même sens de variation que u.

Preuve : $e^{u(x)} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $u'(x)$.*