Chapitre 03 Probabilités : rappels

4 Coefficients binomiaux

On tire simultanément p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. L'ordre n'a pas d'importance, les éléments ne peuvent pas être répétés.

Définition : On obtient ainsi un ensemble (nécessairement non ordonné) de p numéros appelé combinaison de p élèments parmi n.

Propriété : Le nombre de combinaisons de p élèments parmi n (avec $p \leqslant n$) est le nombre noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, qu'on lit « p parmi n » (ou encore « nombre de combinaisons de p élèments parmi n »), et qui est égal à : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Convention : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

5 Lois de probabilité discrètes (rappels)

5.1 Loi de Bernouilli

Définition : On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues A (succès) et $\overline{A}$ (échec). Une telle expérience est appelée épreuve de Bernouilli.
On note X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il y a un succès et 0 sinon. Soit p la probabilité associée à l'événement $X = 1$. On dit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p. On note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemples :1. Lancé d'une pièce P, F.
2. Un patient est atteint d'une maladie ou non

Propriété : On considère une épreuve de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire suit une loi de Bernouilli de paramètre p : $B(p)$.
Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

5.2 Loi binomiale

Exemple introductif : Sur une avenue trois feux tricolores sont au rouge avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$ et fonctionnent indépendamment les uns des autres.
1. Modéliser cette situation par un arbre.
2. Calculer la probabilité pour un automobiliste de s'arrêter au rouge sur les trois feux tricolores.

Définition : On considère une épreuve de Bernouilli. On répéte n fois ($n \geqslant 1$) de manière indépendante cette expérience. On dit alors que l'on constitue une expérience de Bernouilli (ou encore un schéma de Bernouilli.
On note p la probabilité d'un succès dans l'épreuve de Bernouilli.
On définit une variable aléatoire Y correspondant au nombre de succès. Alors on dit que Y suit une loi binomiale de paramètre n et p. On écrit : $Y \rightsquigarrow B(n, p)$

Exemple : Dans l'exemple précédent, le nombre d'arrêt aux feux suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\dfrac{1}{4}$: $\left(B\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

Remarque : Une telle expérience peut facilement être modélisée par un arbre

Propriété : On considère une expérience de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et p : $B(n, p)$.
Alors la probabilité d'obtenir k succès au bout des n épreuves est :

$$P(Y = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

Preuve : Il y a : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons d'obtenir k succès parmi les n épreuves : autrement dit il y a dans l'arbre représentant une expérience de Bernouilli, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ branches.

Pour chaque branche, il y a k succès qui ont une probabilité p de survenir et $n-k$ échecs qui ont une probabilité $1-p$ de survenir. Comme ces épreuves sont indépendantes, la probabilité que cela survienne est $p^k(1-p)^{n-k}$.

On obtient ainsi : $P(Y=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$

Exemple : Avec l'exemple précédent, compter la probabilité d'avoir à s'arrêter à exactement deux feux rouges.

On a : $P(Y=2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{128}$.

Propriété : On considère une expérience de Bernouilli, dans la quelle une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et p : $B(n, p)$.
Alors : $E(Y) = np$.

X.O.B.