Probabilités

1 Généralités (rappels)

Les probabilités s'occupent de phénomènes aléatoires, c'est à dire qui sont liés au hasard.

1.1 Vocabulaire

Définition : On appelle expérience aléatoire , une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire. Les résultats possibles d'une épreuve de l'expérience aléatoire sont appelés les issues.
Mathématiquement, pour modéliser une expérience aléatoire, on représente la globalité des issues par un ensemble appelé univers et noté Ω ; chacun des éléments de cet ensemble représentant une issue possible, ces issues étant toutes possibles et incompatibles entre elles deux à deux.
Le choix d'un tel ensemble n'est pas unique.

Exemple : Jet d'un dé à six faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Jet d'une pièce : $\Omega = \{"Pile", "Face"\}$

Définition : On appelle événement la réalisation d'une propriété lors d'une expérience aléatoire. Pour un univers déterminé, on appelle aussi événement l'ensemble des issues qui réalisent cette propriété. Lors d'une épreuve, en fonction de l'issue la propriété sera réalisée ou non.

Exemple : Lorsque l'on jette un dé à six faces numérotées de 1 à 6, la propriété « être un nombre impair » correspond à l'événement A « le jet de dé a donné un nombre impair » ; il est réalisé pour les issues 1 ; 3 et 5.

Définition : On appelle événement tout sous ensemble A de l'univers.

Exemple : En choisissant comme univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lors du lancer d'un dé à 6 faces, l'événement A correspondant à la propriété « le nombre sorti est impair » sera le sous ensemble $A = 1; 3; 5$.

Définition : On dit qu'un événement A est élémentaire, si une seule issue le réalise.

Définition : Ω est l'événement certain et $\emptyset$ l'événement impossible.
L'événement contraire $\overline{A}$ est l'événement qui a lieu quand l'événement A n'a pas lieu.
L'événement $A \cup B$ est l'événement qui a lieu quand l'événement A ou (non exclusif) l'événement B a lieu.
L'événement $A \cap B$est l'événement qui a lieu quand l'événement A et l'événement B ont lieu simultanément.
Si $A \cap B = \emptyset$, alors les événements A et B sont dits incompatibles : cela veut dire qu'ils ne peuvent pas avoir lieu simultanément.

Exemples : Toujours, en lançant un dé, l'événement $\overline{A}$ correspondant à la propriété « le chiffre sorti est pair » est l'évènement contraire de l'évènement A associé à la propriété « le chiffre sorti est impair ».

Dans le tirage au sort d'une carte d'un jeu de 32 cartes, l'événement $A \cup B$, constitué de l'évènement A associé à la propriété « un roi est sorti » et de l'évènement B associé à « la couleur sortie est rouge », est le sous ensemble $A \cup B = \{RCa\,;\,RCo\,;\,RTr\,;\,RPi\,;\,DCa, DCo, VCa, VCo, 10Ca, 10Co, 9Ca, 9Co, 8Ca, 8Co, 7Ca, 7Co, ACa, ACo\}$ par contre l'événement l'événement $A \cap B = \{RCa\,;RCo\}$

Les évènements C : « la carte sortie est un trèfle » et l'évènement D : « la carte sortie est un cœur » sont incompatibles.

1.2 Probabilité

Définition : Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité, une application P qui associe à chaque événement A de Ω un nombre réel $P(A)$ de [0 ;1], et qui soit telle que :
$P(\Omega) = 1$
Pour tout événement A tel que : $A \subset \Omega$, $P(A) \geqslant 0$.
Si A_1, A_2, ..., A_n sont n événements deux à deux incompatibles, alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$.

Propriété : Soit Ω un univers fini, sur lequel on définit une probabilité P.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires ω_i qui le constituent.

Exemple : Revenons au lancer de dé, dont la loi de probabilité est :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Alors la probabilité de l'événement A : « le nombre sorti est impair » est : $p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{3 \times 1}{6} = \frac{1}{2}$.
Si maintenant le dé est truqué et suit la probabilité :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Alors la probabilité de l'événement A : « le nombre sorti est impair » est : $p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriétés : On a alors :
- (i) $P(\emptyset) = 0$
- (ii) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (iv) Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

Propriété : On considère une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables.
Alors la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \frac{\text{nombre d'élèments de } A}{\text{nombre d'élèments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exemple : Avec le dé à 6 faces non truqué et l'événement A de l'exemple précédent : $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Attention!!! Cette formule devient fausse dès que l'on n'a pas équiprobabilité.
Contre-exemple : Avec le dé à 6 faces truqué et l'événement A de l'exemple précédent, on aurait avec cette formule : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ce qui ne correspond à la probabilité trouvée ci-dessus !

1.3 Variables aléatoires

Définition : Soit Ω un univers fini.
Une variable aléatoire X sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle qu'à toute issue ω de Ω, on associe un réel x telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = x$ soit un événement de Ω, que l'on note $X = x$.

Remarque : Cette condition imposée à la variable aléatoire est toujours vérifiée lorsque l'univers est fini. On peut retenir qu'une variable aléatoire X sur Ω est une fonction qui associe à chaque issue de Ω un réel.
Exemple : Dans le lancé de deux dés, on peut définir la variable aléatoire S qui à chaque issue associe la somme des deux dés.
Dans le lancé d 'une pièce non truquée, dont les issues sont pile/face, on peut définir une variable aléatoire X prenant la valeur 0 lorsque l'issue est pile et 1 quand l'issue est face.

Définition : Soit Ω un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité P.
On note $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs prises par une variable aléatoire X sur Ω.
On définit une loi de probabilité pour la variable X, en définissant pour chaque x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$ comme la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Exemple : Sur une pièce non truquée et équilibrée, sans tranche, qu'on lance deux fois, en définissant la variable X comme le nombre d'apparition de piles.

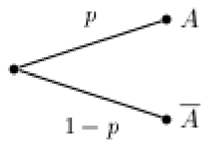
x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

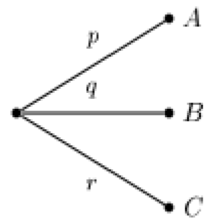
Définition : Soit Ω un univers fini, sur lequel on a défini une loi de probabilité P.
On note $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs prises par une variable aléatoire X sur Ω, de loi de probabilité définie par $P(X = x_i) = p_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
L'espérance de X est le réel $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.
La variance de X est le réel $V(X)$ défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$.
L'écart-type de X est le réel $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété (formule de Koenig-Huygens) : On a : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$.

2 Modélisation d'expériences indépendantes (rappels)

Modélisation d'expérience aléatoire à deux issues : Une expérience aléatoire à deux ou trois issues peut être représenté par un arbre pondéré, où les différentes issues de l'expérience aléatoire sont aux extrémités des branches et la probabilité de chaque issue est inscrite sur la branche conduisant à cette issue.





$p + q + r = 1$

Définition : Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune effet sur le résultat de l'autre.

Exemple : On tire dans une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9 puis on tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Ces deux expériences sont indépendantes.

Définition : Lorsque toutes les expériences sont identiques on parle alors d'épreuves successives.

Propriété : On considère deux épreuves successives indépendantes d'une expérience aléatoire.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le constitue.

Exemple :
On considère que la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille lors d'une naissance.
Quelle est la probabilité d'avoir 4 garçons au cours de 4 naissances successives ?
Quelle est la probabilité d'avoir des naissances alternées.
On peut considérer que cela revient à réaliser 4 épreuves d'une expérience aléatoire.
$P((G, G, G, G)) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.
Avoir des naissances alternées est réalisé par 2 issues : (G, F, G, F) et (F, G, F, G).
$P(\text{naissances alternées}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$.

3 Conditionnement

3.1 Probabilité conditionnelle

Exemple introductif : Dans une classe de 35 élèves, 25 sont des filles. 15 élèves sont demi-pensionnaires, dont 10 filles.
Un élève est interrogé au hasard par un surveillant.
1. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? un demi-pensionnaire ? un demi-pensionnaire féminin ?
$p(F) = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$
$p(DP) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$
$p(DP \cap F) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.
2. Le surveillant voit que c'est une fille. Quelle est la probabilité que ce soit une demi-pensionnaire.
Il y a 10 filles sur les 25 qui sont demi-pensionnaires la probabilité que ce soit une demi-pensionnaire sachant que c'est une fille est donc de : $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.
Généralisation de l'approche statistique : On considère une expérience aléatoire et un événement B relatif à cette expérience, de probabilité non nulle. On considère également un deuxième événement A.
On considère une urne de Bernoulli relative à cette épreuve contenant N boules dont b sont marquées B et a marquées A. On sait de plus que s boules sont marquées à la fois A et B.
On a : $P(B) = \frac{b}{N}$, $P(A) = \frac{a}{N}$ et $P(A \cap B) = \frac{r}{N}$.
Si maintenant on sait que l'événement B est réalisé, c'est à dire qu'il ne reste plus que dans l'urne que des boules marquées B, on a, en notant $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B : $P_B(A) = \frac{r}{b}$.
Comme : $\frac{r}{b} = \frac{\frac{r}{N}}{\frac{b}{N}}$, on obtient : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Théorème Définition : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$. Soit A un événement de Ω.
L'application P_B qui à $A \in \Omega$ fait correspondre le nombre $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω.
Le nombre $P_B(A)$ est appelé probabilité de A sachant B. Ce nombre est parfois abusivement noté $P(A|B)$.

Preuve : $P_B(B) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geqslant 0$, car P est une probabilité.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements de Ω, incompatibles deux à deux.
$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right)}{P(B)}.$$
Or les événements $(A_i \cap B)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles puisque les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ le sont.
Comme P est une probabilité, on a : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$.
D'où : $P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i)$ et donc P_B est bien une probabilité.□

Propriété :

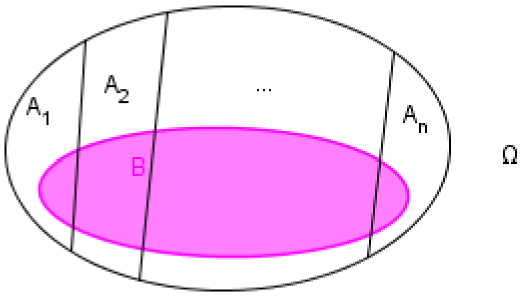
– $P_B(B) = 1$ – $P_B(\emptyset) = 0$ – $P_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$

Preuve : Découle du fait que P_B est une probabilité□

3.2 Formule des probabilités totales

Théorème (Formule des probabilités totales) : Soit Ω un univers fini sur lequel on défini une probabilité P. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements de Ω de probabilités non nulles réalisant une partition de Ω.
Soit B un événement de Ω .
Alors : $p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(B)p(A_i)$.
En particulier, si A est un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$, alors : $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

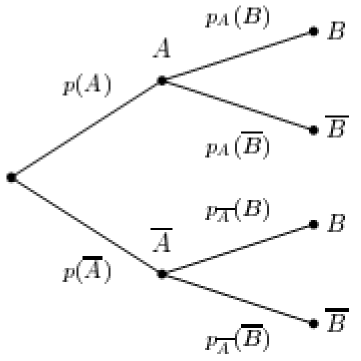
Preuve :



Les événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω.
Donc $(A_i \cap B)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \Omega \cap B = B$.
D'où : $p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B)$.
De plus pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a : $p_{A_i}(B) = \dfrac{p(B \cap A_i)}{p(A_i)}$, d'où la deuxième expression de $p(B)$.□

3.3 Représentation à l'aide d'un arbre prépondéré

La construction d'un arbre pondéré aide à visualiser les choses et est une preuve pour les calculs de probabilités au bac.



Dans un arbre pondéré, chaque branche relie deux noeuds. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.

La somme des probabilités des branches partant d'un noeud fait toujours 1.

Un chemin correspond à une suite de branches. Pour calculer la probabilité d'un chemin on multiplie les probabilités des branches qui le composent entre elles.

Pour connaître la probabilité de B on utilise la formule des probabilités totales.

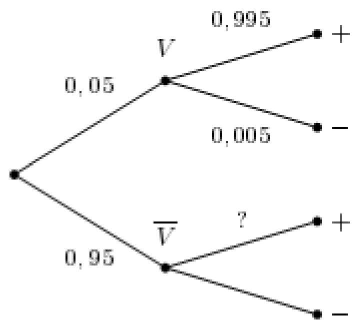
Exemple : Une étude à grande échelle a permis de montrer que dans une population 5% des individus présentent les symptômes d'un virus.

Un test A a été élaboré pour savoir si un individu est contaminé. On constate que 7,825 % de la population est positive à ce test.

Un autre test a permis de montrer que 99,5 % des personnes ayant les symptômes sont positives au test A.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit positive au test A tout en ne présentant pas les symptômes ?

On peut schématiser la situation comme suit :



$$\begin{aligned} p(+) &= p(+\cap V) + p(+\cap \overline{V}) \\ &= p_V(+)p(V) + p_{\overline{V}}(+)p(\overline{V}) \end{aligned}$$

D'où : $p_{\overline{V}}(+) = \dfrac{p(+) - p_V(+)p(V)}{p(\overline{V})} = \dfrac{0,07825 - 0,995 \times 0,05}{0,95} = 0,03$

X.O.B. 2010