Suites

1. Généralités

1.1. Définition

Définition : On appelle suite une fonction sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Exemples:
Les fonctions:
u : n $\longmapsto$ 2n+1 ; v : n $\longmapsto$ n π sont des suites.

Notation :
Soit u une suite définie sur D partie de $\mathbb{N}$. Soit n un entier de d. Alors on note $u_n=u(n)$. On dit que u_n est le terme général de la suite et on note la suite (u_n) . n est appelé l'indice.
Soit m le plus petit élément de D, alors u_m est appelé le premier terme ou terme initial de la suite.

Remarque :
Si $D=\mathbb{N}$, le premier terme de la suite (u_n) est u_0

Exemples:
La suite: u : n $\longmapsto$ 2n+1 est ainsi appelée la suite (u_n) de terme général $u_n=2n+1$.

1.2. Comment générer une suite ?

On a essentiellement trois moyens de générer une suite :

i. se donner une liste finie ou non de nombres...

Exemple :
1;3;5;7;8;11;13;15;17;19;21 est une suite comportant 11 éléments.
Les décimales de π constituent une suite.

ii. de manière explicite : dans ce cas, $u_n=f(n)$

Exemple : $u_n=\dfrac{2n+1}{5n-3}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

iii. de manière implicite : dans ce cas, on parle de formule de récurrence. On a alors dans le cas le plus simple une expression du type : $u_{n+1}=f(u_n)$, et il faut donc donner le terme initial pour générer la suite.

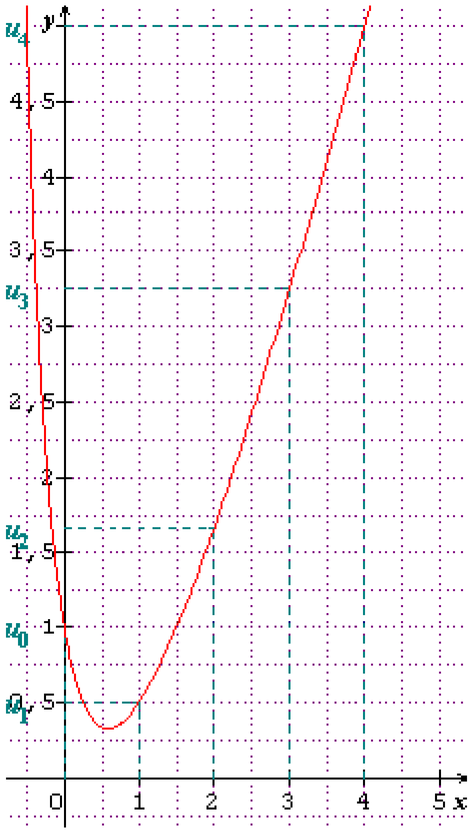
Exemples : $u_{n+1}=u_n+5$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec par exemple $u_0=-7$ ou encore : $v_{n+1}=3v_n$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec $v_0=-5$.

1.3. Représentation graphique d'une suite

1.3.1. Cas des suites définies de manière explicite

On suppose que la suite est de terme général : $u_n=f(n)$
Dans ce cas, à chaque valeur de n en abscisse correspond un terme de la suite u_n en ordonnée.

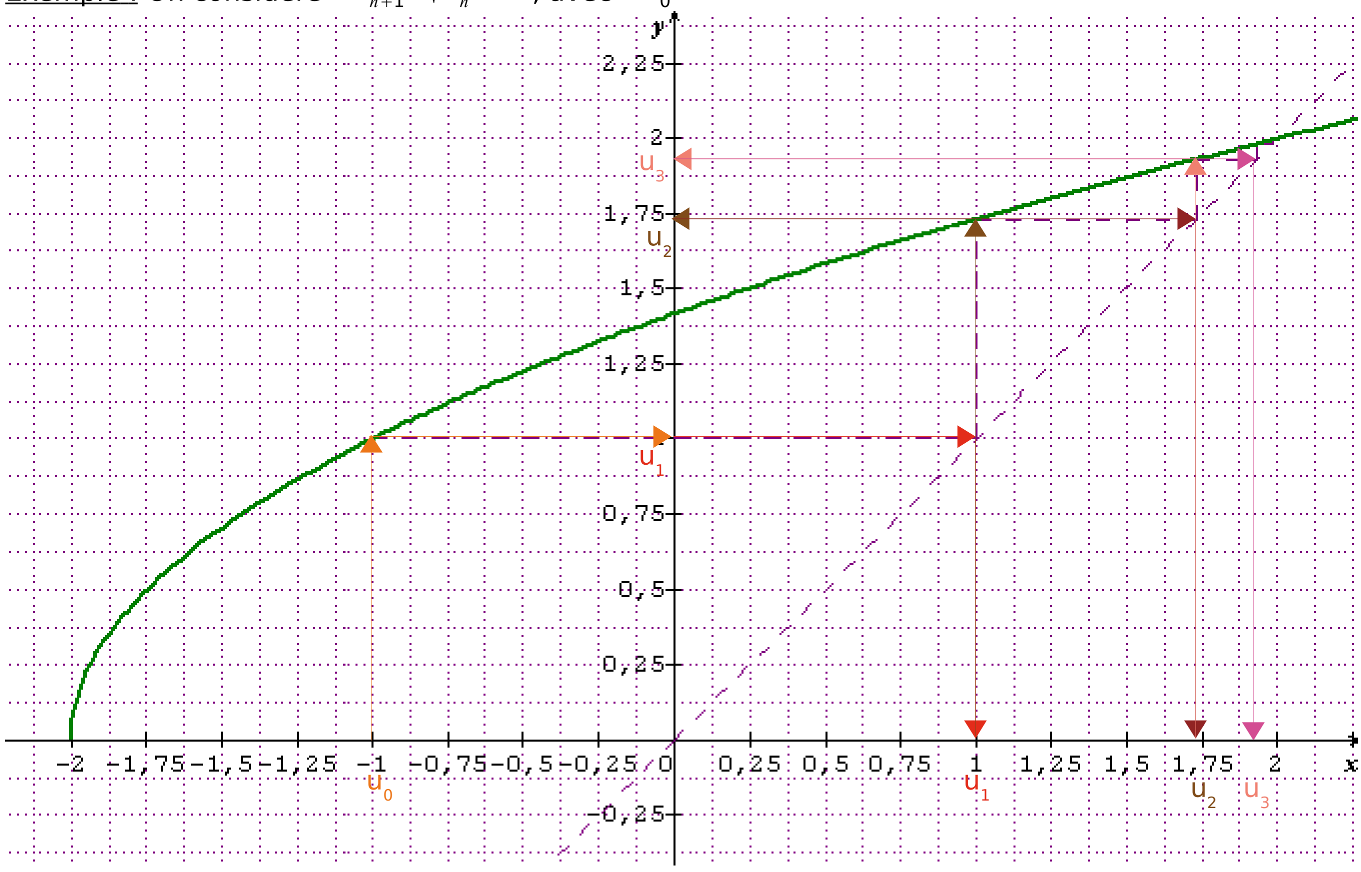
Exemple : *On considère la suite de terme général* $u_n=\dfrac{2n^2-2n+1}{n+1}$.
Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



1.3.2. Cas des suites définies de manière implicite

On suppose que la suite est de terme général : $u_{n+1}=f(u_n)$, u_0 étant donné.
Alors, on construit les termes de proche en proche, en s'aidant de la droite d'équation $y=x$.
Ainsi u_1 est l'image de u_0 par f . Donc sa valeur est lue sur l'axe des ordonnées. Puis on reporte u_1 sur l'axe des abscisses en s'aidant de la droite d'équation $y=x$ et ainsi de suite.

Exemple : On considère $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$, avec $u_0=-1$



2. Sens de variation d'une suite

Définition : Soit une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$.

On dit que (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel supérieur ou égal à p, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$.

On dit que (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel supérieur ou égal à p, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Remarque : Pour étudier les variations d'une suite, on peut aussi étudier :

- le signe de $u_{n+1}-u_n$: si pour tout $n \geqslant p$ il est positif la suite sera croissante, sinon la suite sera décroissante.
- si la suite est strictement positive à partir d'un certain rang, de regarder le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si ce rapport est supérieur strictement à 1 pour tous les termes au delà d'un certain rang la suite est croissante (strictement), sinon si ce rapport est inférieur strictement à 1 pour tous les termes au delà d'un certain rang elle est décroissante.
- Pour une suite définie explicitement, du type $u_n = f(n)$, le sens de variation de f.
- Pour une suite définie implicitement, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 étant donné, avec f croissante, il suffit de comparer les deux premiers termes et par récurrence deux termes consécutifs.

Exemples :

1. On considère la suite de terme général : $u_n = n^2 - 3n - 7$. Alors : $u_{n+1}-u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - 7 - (n^2 - 3n - 7) = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 - 7 - n^2 + 3n + 7 = n^2 + 2n - 2$.
   Or, $\Delta = 4 + 8 = 12$ et donc $n_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \leqslant 0$ et $n_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$. De plus, $0 \leqslant n_2 \leqslant 1$. Donc $u_{n+1}-u_n$ est positif pour $n \geqslant 1$, ce qui signifie que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
2. On considère la suite de terme général : $u_n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$.
   Cette suite ne s'annule pas. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{\frac{n+3}{n+2}}{\frac{n+2}{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+3}{n+2} \times \frac{n+1}{n+2}} = \sqrt{\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}} \leqslant 1$ et donc (u_n) est décroissante.
3. On considère la suite de terme général : $v_n = n + \sqrt{n}$. On considère la fonction : $f(x) = x + \sqrt{x}$. On a : $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \geqslant 0$. Donc f est croissante, et donc (v_n) est croissante.
4. On considère la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, et $u_0 = 1$. On considère la fonction : $f(x) = \sqrt{x+1}$. f a les mêmes variations que la fonction racine carrée , elle est donc croissante sur $[-1;+\infty[$.
   $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 1 \geqslant 0$. Par suite, on a : $u_1 \geqslant u_0$. Comme f est croissante, $f(u_1) \geqslant f(u_0)$, et donc $u_2 \geqslant u_1$.
   On suppose que $u_n \geqslant u_{n-1}$, alors comme f est croissante, $f(u_n) \geqslant f(u_{n-1})$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   Donc pour tout entier n, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

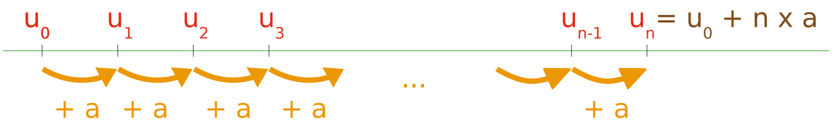
3. Suites arithmétiques

Définition : On appelle suite arithmétique une suite où l'on passe, en partant du terme initial, d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité, appelée raison de la suite.
En notant (u_n) une telle suite et a la raison, on a : $u_{n+1}=u_n+a$.

Exemple : Une usine fabrique des ramettes de papier, emballées dans des cartons par 5, chaque carton pesant 2,5 kg qu'elle empile alors sur une palette en bois de 20 kg. On note (u_n) la suite correspondante à la masse totale du chargement.
Alors $u_{n+1}=u_n+2{,}5$, avec $u_0=20$.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a et de premier terme u_0 . Alors : $u_n=u_0+n\times a$.

Schématiquement, on peut représenter cela comme suit :



Exemple : Avec la suite précédente : $u_n=20+2{,}5\times n$
Ainsi, si on met 100 cartons sur la palette : $u_{100}=20+2{,}5\times 100=270\text{ kg}$.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a. Soit p et q deux entiers. Alors : $u_q=u_p+(q-p)\times a$.

Exemple :
La fabrication d'un objet comporte un coût fixe et un coût proportionnel au nombre d'objets fabriqués. On sais que pour 50 objets fabriqués, le coût est de 200 € et qu'il est de 375 € pour 100 objets fabriqués.
Déterminer le coût proportionnel. Le coût fixe.

Sens de variation d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a. Si $a>0$, alors (u_n) est croissante. Si $a=0$, alors (u_n) est constante. Si $a<0$, alors (u_n) est décroissante.

Somme de termes d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a. Soit p et q deux entiers, avec m < n. Alors : $\sum_{i=m}^{n} u_i=u_m+\ldots+u_n=(n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}$, c'est à dire : $\text{somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique}=\text{nombre de termes}\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$.

Preuve :
On note S la somme : $S=u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n$.
Par suite : $2S=S+S=u_m+u_{m+1}+\ldots+u_{n-1}+u_n$. Comme $u_k=u_0+k\times a$, la somme terme à terme
$+u_n+u_{n-1}+\ldots+u_{m+1}+u_m$
(l'un en dessous de l'autre) donne : $2u_0+(m+n)a=u_m+u_n$ et ceci $n-m+1$ fois.
D'où : $2S=(n-m+1)\times(u_m+u_n)$ et donc : $S=(n-m+1)\times\frac{u_m+u_n}{2}$.

Cas particulier important : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a, de premier terme u_0 .

Alors : $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$, c'est à dire :

$\text{somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Preuve directe :

On note S la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Par suite : $2S = S + S = \begin{array}{l} u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ + u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 \end{array}$. Comme $u_k = u_0 + k \times a$, la somme terme à terme (l'un en dessous de l'autre) donne : $2u_0 + na = u_0 + u_n$ et ceci $n+1$ fois.

D'où : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$ et donc : $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

Exemple :

Calculer la somme des n premiers entiers.

Pour générer les n premiers entiers on considère la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0. Alors, la somme des n premiers entiers équivaut à la somme des n+1 premiers termes de cette suite et vaut : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. Suites géométriques

4.1. Généralités

Définition : On appelle suite géométrique une suite où l'on passe, en partant du terme initial, d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité, appelée raison.

En notant (u_n) une telle suite et q la raison, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

NB : En TES, on se limite à une raison positive.

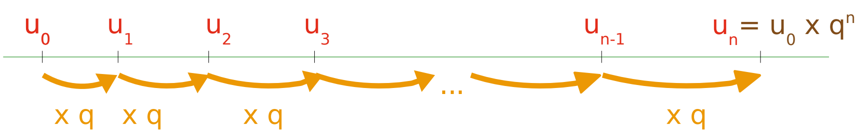
Exemple : *Une banque rémunère un compte sur livret à 3 % l'an. On verse 100 €. On note* (u_n) *la suite correspondant à l'argent sur le livret au bout de n années. Expliciter* (u_n) .

Alors $u_{n+1} = u_n \times 1{,}03$, avec $u_0 = 100$.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q et de premier terme u_0 .

Alors : $u_n = u_0 \times q^n$.

Schématiquement, on peut représenter cela comme suit :



Exemple : Avec la suite précédente : $u_n = 100 \times 1{,}03^n$

Ainsi, au bout de 10 ans l'épargne sera de : $u_{10} = 100 \times 1{,}03^{10} \approx 134{,}4$ €.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q. Soit m et n deux entiers.

Alors : $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

Exemple :

Un épargnant a placé de l'argent au taux de 2 %. Au bout de 2 ans, il a 156,06 € sur son compte. Quelle sera la somme qu'il aura au bout de 5 ans ?

$u_5 = u_2 \times 1{,}02^{5-2} = 156{,}06 \times 1{,}02^3 \approx 165{,}61$ €.

4.2. Sens de variation

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q>0.
Si $u_0>0$:

- Si $q>1$, alors (u_n) est croissante.
- Si $q=1$, alors (u_n) est constante.
- Si $0<q<1$, alors (u_n) est décroissante.

Si $u_0<0$:

- Si $q>1$, alors (u_n) est décroissante.
- Si $q=1$, alors (u_n) est constante.

Si $0<q<1$, alors (u_n) est croissante.

4.3. Somme de termes consécutifs

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q positive, différente de 1. De terme initial 1.
Alors : $\sum_{i=0}^{n} q^i=1+q+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q, avec $q\neq1$, de premier terme u_0 .
Alors : $\sum_{i=0}^{n} u_i=u_0+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, c'est à dire :

Preuve directe : On note S la somme : $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$.
Comme pour tout k entre 0 et n, $q\times u_k=u_{k+1}$, $q\times S=q\times u_0+q\times u_1+\ldots+q\times u_n$
$=u_1+u_2+\ldots+u_{n+1}$

Par suite :
$$\begin{aligned} q\times S-S= & \quad u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1} \\ & -u_0-u_1-\ldots-\ldots-u_n \\ = & -u_0+u_{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $(q-1)S=-u_0+u_0\times q^{n+1}=u_0(-1+q^{n+1})$ et donc, si $q\neq1$: $S=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple :
Calculer la somme des n premières puissances de 2.
$v_n=2^n$: (v_n) est une suite géométrique de raison 2, de premier terme 1.
$\sum_{i=0}^{n} 2^i=v_0+\ldots+v_n=1\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$

4.4. Limite d'une suite géométrique

Exemples :
Faire la représentation graphique des suites géométriques de terme initial 1, de raison 2 et de raison ½. Qu'observe-t-on graphiquement lorsque n devient grand.

Propriété : Soient (u_n) une suite géométrique de raison q, de premier terme $u_0>0$
(i) Si $q>1$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
(ii) Si $0<q<1$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.
(iii) Si $q=1$, alors la suite est constante et : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

4.5. Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

Déterminer le rang à partir duquel la suite géométrique de raison ¾ de terme initial 1, devient inférieur à 0,001.

Résolution :
```
u prend la valeur 1
n prend la valeur 0
Tant que u>0,001 faire
      n<-n+1
      u=u*3/4
Fin tant que
Afficher n
```

Déterminer le rang à partir duquel la suite géométrique de raison 2 de terme initial 1, devient supérieur à 10000.
Résolution :
```
u prend la valeur 1
n prend la valeur 0
Tant que u<10000 faire
      n<-n+1
      u=u*2
Fin tant que
Afficher n
```

5. Suites arithmético-géométriques

Principe de l'étude :

1. Si (u_n) admet une limite l , alors $l = al + b$. Cela permet de calculer la limite éventuelle.
2. On introduit la suite : $v_n = u_n - l$. On montre que cette suite est géométrique et on détermine sa raison.
3. On cherche l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n.
4. On conclut sur la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Exemple : Sujet de bac, Métropole 2005

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.
Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : Étude théorique

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année $2005 + n$.
Ainsi, $u_0 = 100000$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n + 4000$.
3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 80000$.
   a) Calculer v_0 .
   b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $u_n = 180000 \times (1,05)^n - 80000$.
   d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B :

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **Partie A**.

1) Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2) A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?