Continuité. Convexité

1 Notion de continuité

1.1 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition « intuitive » de la continuité : On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle (inclus dans son domaine de définition) si la courbe représentative de cette fonction sur cet intervalle peut être tracé sans lever le crayon (c'est à dire est d'un seul tenant)

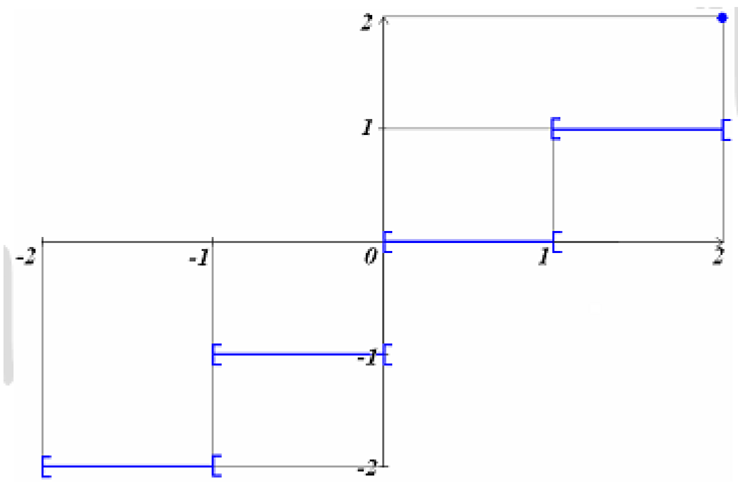
Propriété : La somme, le produit et la composée de fonctions continues sur un intervalle I inclus dans leur domaine de définition sont continues sur I.
Le quotient de deux fonctions continues sur I est continue sur I privé des points où le quotient n'est pas défini.

Propriété : Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des domaines où elles sont définies.

Exemple de la fonction partie entière :

Définition : La fonction partie entière, notée E, est la fonction qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur à x.

Exemples : $E(4,3) = 4$, $E(-3,2) = -4$, $E(11) = 11$.



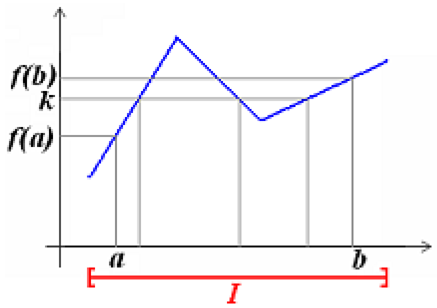
Propriété : La fonction partie entière est continue sur tout intervalle $[n\,;\,n+1[$, où : $n \in \mathbb{Z}$.
La fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Globalement la fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Etre défini en a est une condition nécessaire pour être continue en a. Par contre, l'exemple de la fonction partie entière nous montre qu'être défini en a n'est pas une condition suffisante pour être continue en a.

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (admis) : Soit f une fonction définie et continue sur I. Soit a et b deux éléments de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : Autrement dit chacune des valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise au moins une fois.



Ici la droite d'équation $y = k$, où k est entre $f(a)$ et $f(b)$ coupe trois fois la courbe représentative de f .

> Corollaire : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
> Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarques :

– Ce corollaire est encore valable sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non.

Dans ce cas $f(a)$ et $f(b)$ deviennent éventuellement $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Par exemple, si $I = [a\,;\,+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pour tout réel $k \geqslant f(a)$, il existe un unique $c \geqslant a$, tel que $f(c) = k$.

– Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
  – tout réel de I admet une image par f dans J ;
  – tout réel de J admet un unique antécédent dans I.

– Un cas particulier intéressant du corollaire du TVI : Si une fonction continue strictement monotone change de signe sur un intervalle I, alors elle s'annule exactement une fois sur cet intervalle.
  On peut traduire cela différemment : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple : Chercher le nombre de solutions de $x^4 - 2x^2 + 0,5 = 0$

$f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 0,5$

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

On a : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

D'où le tableau de variation :

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$-0,5$	↗	$0,5$	↘	$-0,5$	↗	$+\infty$

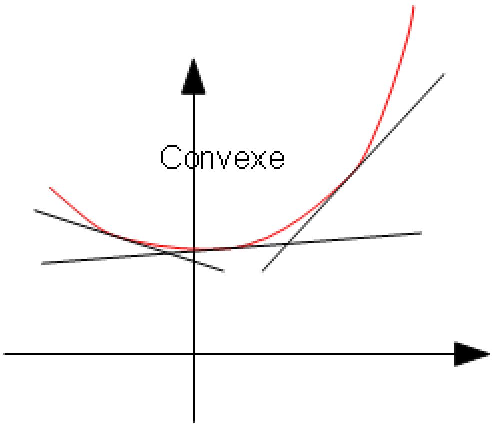
f étant continue sur $\mathbb{R}$ et comme f est strictement monotone sur $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$,... et change de signe sur chaque intervalle, cette équation admet quatre solutions sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On convient désormais que dans les tableaux de variations, les flèches obliques représentent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On pourra donc se référer directement au tableau de variation pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.

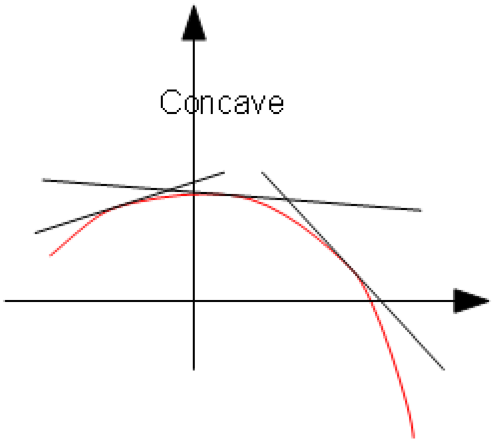
2 Convexité

2.1 Définitions

Définition : On dit qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si la courbe représentative de cette fonction sur I est au dessus de chacune de ses tangentes.



On dit qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est concave sur I si la courbe représentative de cette fonction sur I est au dessous de chacune de ses tangentes.

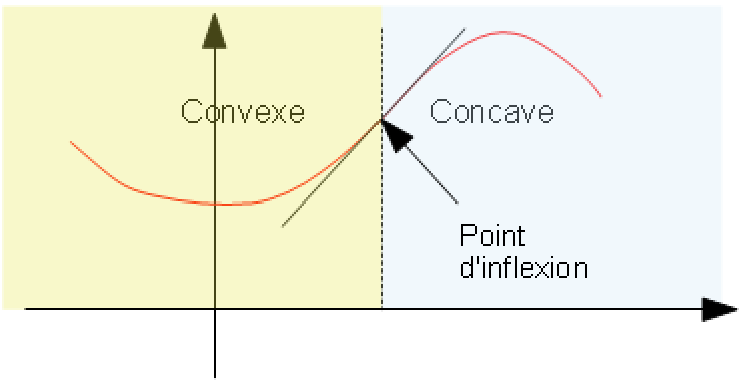


Exemple : La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle point d'inflexion de la courbe de f, un point où la courbe traverse sa tangente.

Exemple : La fonction cube admet un point d'inflexion en 0.

Conséquence : En un point d'inflexion, la fonction passe de convexe à concave ou l'inverse.



2.2 Convexité et dérivées...

2.2.1 ... premières

Propriété (admise) : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.
f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I.

Exemple : $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$. En effet, on a : $f'(x) = 3x^2$, fonction qui est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2.2.2 ... secondes

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, dont la dérivée est elle même dérivable sur I
On appelle fonction dérivée seconde de f sur I, la fonction notée f'' qui est la dérivée de f' sur I.

Exemples : $f : x \mapsto x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$ et pour dérivée seconde : $f''(x) = 6x$.
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et pour dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

Propriété (admise) : Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.
Si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$ alors f est convexe sur I.
Si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$ alors f est concave sur I.

Exemples : $f : x \mapsto x^3$ a pour dérivée seconde : $f''(x) = 6x$. Or $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$. Donc f est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Propriété (admise) : Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.
Le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f ssi f'' s'annule et change de signe en a.

Exemples : $f : x \mapsto x^3$ a sa dérivée seconde qui s'annule en 0 et qui change de signe. Donc le point de coordonnées $(0\,;0)$ est un point d'inflexion de la courbe de f.