Transformations

1. Généralités

1.1. Transformations

Définition : On appelle transformation du plan (respectivement de l'espace), une bijection du plan (respectivement de l'espace) dans lui-même, c'est à dire telle que tout point du plan (respectivement de l'espace) admet une unique image et un unique antécédent.

Notation : Soit f une telle transformation, on note : $f : M \mapsto f(M) = M'$

Exemples : Translation, symétrie axiale, symétrie centrale, rotation.
Dans une symétrie axiale, tout point du plan a une image unique par la symétrie. Egalement, chaque point du plan admet un unique antécédent donc la symétrie axiale est une bijection du plan, et c'est donc une transformation du plan.

Contre-exemple : Projection orthogonale
Par la projection orthogonale, tout point admet une unique image. Par contre, les points de la droite de projection admettent plusieurs antécédents, alors que tout autre point n'en admet aucun. Autrement dit la projection orthogonale n'est pas une transformation.

Définition : On dit qu'un point M est invariant par une transformation f, si $f(M) = M$

Exemple : Dans une rotation, il y a un seul point invariant : le centre de la rotation.

Définition : L'unique transformation du plan (de l'espace) qui laisse tous les points invariants s'appelle l'identité du plan (de l'espace).

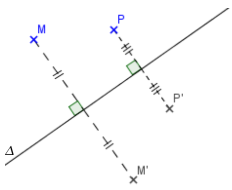
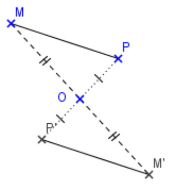
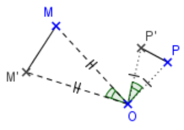
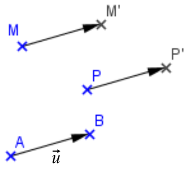
Définition : Soit f une transformation de l'espace qui à tout point M associe un point M'.
On appelle transformation réciproque et on note f^{-1}, la transformation telle que :

$$f^{-1}(f(M)) = f\left(f^{-1}(M)\right) = M,$$

c'est-à-dire telle qu'à tout point M' on associe le point M.

Exemple : La transformation réciproque d'une symétrie axiale est elle-même.
La transformation réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

1.2. Transformations planes

	Symétrie axiale	Symétrie centrale	Rotation	Translation
Définition	D'axe Δ	De centre O	De centre O, d'angle α	De vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
Transformation qui à tout point M associe M' tel que :	Δ soit la médiatrice de [MM']	O soit le milieu de [MM']	$\begin{cases} OM'=OM \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \\ =\alpha+2k\pi \end{cases}$	$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$
Figure				
Invariants	Δ est invariante point par point	O	O	Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, aucun point invariant.
Transformation réciproque	Symétrie d'axe Δ	Symétrie centrale de centre O	Rotation de centre O, d'angle $-\alpha$	Translation de vecteur $-\vec{u}$
Conservation	Distances, angles géométriques, parallélisme, orthogonalité, barycentres, aires, contact			
		Angles orientés		
Images	D'une droite est une droite	D'une droite est une droite parallèle	D'une droite est une droite	D'une droite est une droite parallèle
	D'un cercle est un cercle de même rayon, de centre l'image du centre du cercle initial			

2. Translations de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, la transformation de l'espace telle qu'à tout point M on associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Propriété fondamentale :
Soit M et N deux points de l'espace, d'images respectives M' et N' par une translation t. Alors : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

Preuve : Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation.

Comme $M'=t_{\vec{u}}(M)$, on a : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Comme $N'=t_{\vec{u}}(N)$, on a : $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'}&=\overrightarrow{M'M}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN'}\\&=-\vec{u}+\overrightarrow{MN}+\vec{u}\\&=\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Réciproque de la propriété fondamentale :
Soit M et N deux points de l'espace, d'images respectives M' et N' par une transformation f telle que : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$. Alors f est une translation.

Preuve : Dire que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, signifie que M'N'NM est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. En posant $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$, on a : M' et N' sont les images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Propriété : La transformation réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Preuve : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u} \Leftrightarrow t_{-\vec{u}}(M') = M$.

Propriété : Une translation de l'espace conserve le barycentre.

Preuve : Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation.
Soit G barycentre de $(A_1;\alpha_1)$, $(A_2;\alpha_2)$, ..., $(A_n;\alpha_n)$, avec $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$. On a :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \qquad (1).$$

Soit $G' = t_{\vec{u}}(G)$, $A'_1 = t_{\vec{u}}(A_1)$,...,$A'_n = t_{\vec{u}}(A_n)$.
D'après la propriété fondamentale, on a : $\overrightarrow{G'A'_1} = \overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{G'A'_2} = \overrightarrow{GA_2}$, ..., $\overrightarrow{G'A'_n} = \overrightarrow{GA_n}$
D'où :(1) devient :

$$\alpha_1\overrightarrow{G'A'_1} + \alpha_2\overrightarrow{G'A'_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0}$$

et donc G' est le barycentre de : $(A'_1;\alpha_1)$, $(A'_2;\alpha_2)$, ..., $(A'_n;\alpha_n)$.

Propriété de conservation :
Par une translation, on conserve : les longueurs, les aires, les volumes, les angles géométriques et orientés, l'alignement.

Preuve : Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation, notée t.
Soit M et N deux points de l'espace et M' et N' leur image par t.
On a d'après la propriété fondamentale : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. Donc, en particulier : $\left\|\overrightarrow{M'N'}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$, d'où la propriété de conservation des longueurs.
Pour les aires et volumes, la propriété est admise.
Soit P et Q deux points supplémentaires et P' et Q' leur image par t.
On a : $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$.
d'où : $\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right) = \left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)$
Soient A, B et C trois points alignés. Alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = k\pi$, et donc d'après la propriété de conservation des angles : $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right) = k\pi$ et donc A', B' et C' sont alignés.

Propriété : Soit t une translation de l'espace.
1. L'image d'un plan par t est un plan parallèle.
2. L'image d'une droite par t est une droite parallèle.
3. L'image d'un segment par t est un segment à support parallèle et de même longueur, dont les extrémités sont les images par t des extrémités du segment.
4. L'image d'un cercle par t est un cercle de même rayon, de centre l'image du centre par t.

Preuve de 1 : Montrons cela par double inclusion :
On note $\mathcal{P}$ un plan, passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $A' = t(A)$ et $\mathcal{P}'$ le plan passant par A' et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(i) Soit M un point de $\mathcal{P}$. Il existe x et y deux réels tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Soit $M' = t(M)$. On a d'après la propriété fondamentale de la translation :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

et donc $M' \in \mathcal{P}'$.
Donc l'image de $\mathcal{P}$ est incluse dans $\mathcal{P}'$: $t(P) \subset P'$.

(ii) Soit $N' \in \mathcal{P}'$. Il existe x' et y' deux réels tels que : $\overrightarrow{A'N'} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. Comme t est une transformation, il existe un unique point N tel que : $t(N) = N'$. De plus $t(A) = A'$. Donc N et A sont les images par la transformation réciproque de t de N' et A'. Donc, d'après la propriété fondamentale appliquée à cette translation réciproque :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A'N'} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$$

donc $N \in \mathcal{P}$. Donc chaque point de $\mathcal{P}'$ est l'image d'un point qui appartient à $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}'$ est inclus dans l'image de $\mathcal{P}$: $t(P) \supset P'$.
Donc l'image de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}'$ dans son intégralité : $t(P) = P'$.
Ces plans sont parallèles car dirigés par le même couple de vecteurs.

Preuve de 2 : Montrons cela par double inclusion :
(i) Soient A et B deux points d'une droite d, d'images respectives par t A' et B'. Soit M un point de d. Alors A, B et M sont alignés et donc par conservation de l'alignement A', B' et M' sont alignés. Donc M' appartient à (A'B').

Donc l'image de (AB) est incluse dans (A'B') : $t((AB)) \subset (A'B')$.

(ii) Soit $N' \in (A'B')$, alors comme t est une transformation, il existe un unique point N tel que : $t(N) = N'$. De plus $t(A) = A'$, $t(B) = B'$ et N', A' et B' sont alignés, alors N, A et B sont alignés, comme images par la transformation réciproque de N', A' et B', donc $N \in (AB)$.
Donc chaque point de (A'B') est l'image d'un point qui appartient à (AB) : (A'B') est inclus dans l'image de (AB) : $t((AB)) \supset (A'B')$.
Donc l'image de (AB) est (A'B') dans son intégralité : $t((AB)) = (A'B')$.

Comme de plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, on a (AB)//(A'B').

La démonstration de 3 est analogue.

Preuve de 4 : Montrons cela par double inclusion :
(i) Soit O le centre du cercle, noté $\mathcal{C}$, et R son rayon. Soit O' l'image de O par t.
Soit $M \in \mathcal{C}$. Soit M' l'image de M par t.
Comme l'image d'un segment est un segment de même longueur et d'extrémités les images des extrémités du segment de départ, on a : $O'M' = OM = R$ et donc M' appartient au cercle de centre O' de rayon R.
Donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ est incluse dans le cercle de centre O' de rayon R, noté $\mathcal{C}'$.
(ii) Soit $N' \in \mathcal{C}'$, alors comme t est une transformation, il existe un unique point N tel que : $t(N) = N'$. De plus $t(O) = O'$. Donc O et N sont les images par la transformation réciproque de t de O' et N' et donc : $O'N' = ON = R$ et N appartient à $\mathcal{C}$.
Donc chaque point de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un point qui appartient à $\mathcal{C}$, autrement dit $\mathcal{C}'$ est inclus dans l'image de $\mathcal{C}$.
Par suite, l'image de $\mathcal{C}$ par t est le cercle $\mathcal{C}'$ dans son intégralité.

3. Homothéties de l'espace

Définition : Soit k un réel non nul et O un point.
On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation de l'espace telle qu'à tout point M on associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarques : 1. Une homothétie de rapport 1 est l'identité.
2. Une homothétie de centre O et de rapport -1 est une symétrie centrale de centre O.

Propriété : Soit h une homothétie de centre O, de rapport k.
Soit M un point et M' son image par h.
Alors O, M et M' sont alignés.

Propriété fondamentale :
Soit M et N deux points de l'espace, d'images respectives M' et N' par une homothétie h, de rapport k. Alors :
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Preuve : Soit k le rapport de l'homothétie et O son centre.

Comme $M' = h(M)$, on a : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Comme $N' = h(N)$, on a : $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$

$$= -k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON}$$
$$= k\overrightarrow{MN}$$

Propriété : La transformation réciproque d'une homothétie de centre O, de rapport k est l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{k}$.

Preuve : $M' = h_{(O;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow h_{\left(O;\frac{1}{k}\right)}(M') = M$.

Propriété : Une homothétie de l'espace conserve le barycentre.

Preuve : Soit k le rapport de l'homothétie et O son centre.
Soit G barycentre de $(A_1;\alpha_1)$, $(A_2;\alpha_2)$, ..., $(A_n;\alpha_n)$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$. On a :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \qquad (1).$$

Soit $G' = h_{\left(O;\frac{1}{k}\right)}(G)$, $A'_1 = h_{\left(O;\frac{1}{k}\right)}(A_1)$,..., $A'_n = h_{\left(O;\frac{1}{k}\right)}(A_n)$.

D'après la propriété fondamentale, on a : $\overrightarrow{G'A'_1} = k\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{G'A'_2} = k\overrightarrow{GA_2}$, ..., $\overrightarrow{G'A'_n} = k\overrightarrow{GA_n}$
D'où :(1) devient, après avoir été multipliée par k :

$$\alpha_1\overrightarrow{G'A'_1} + \alpha_2\overrightarrow{G'A'_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0}$$

et donc G' est le barycentre de : $(A'_1;\alpha_1)$, $(A'_2;\alpha_2)$, ..., $(A'_n;\alpha_n)$.

Propriété :
Par une homothétie de rapport k, on multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2, les volumes par $|k|^3$.

Preuve pour les longueurs : Soit k le rapport de l'homothétie, notée h, et O son centre.
Soit M et N deux points de l'espace et M' et N' leur image par h.

On a d'après la propriété fondamentale : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Donc, en particulier : $\left\|\overrightarrow{M'N'}\right\| = |k| \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$, d'où le fait que les longueurs soient multipliées par $|k|$.
Pour les aires et volumes, la propriété est admise.

Propriété de conservation :
Par une homothétie, on conserve : les angles géométriques et orientés, l'alignement.

Preuve : Soit k le rapport de l'homothétie, notée h, et O son centre.
Soit M et N deux points de l'espace et M' et N' leur image par h.

On a d'après la propriété fondamentale : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Soit P et Q deux points supplémentaires et P' et Q' leur image par h. On a : $\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{PQ}$.

d'où : $\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right) = \left(k\overrightarrow{MN};k\overrightarrow{PQ}\right) = \left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)$.

Soient A, B et C trois points alignés. Alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=k\pi$, et donc d'après la propriété de conservation des angles : $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)=k\pi$ et donc A', B' et C' sont alignés.

Propriété : Soit h une homothétie de l'espace, de centre O, de rapport k.
1. L'image d'un plan par h est un plan parallèle.
2. L'image d'une droite par h est une droite parallèle.
3. L'image d'un segment par h est un segment à support parallèle et de longueur multipliée par $|k|$, dont les extrémités sont les images par h des extrémités du segment.
4. L'image d'un cercle par h est un cercle de rayon multiplié par $|k|$, de centre l'image du centre par h.

Preuve de 1 : Montrons cela par double inclusion :
On note $\mathcal{P}$ un plan, passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $A' = h(A)$ et $\mathcal{P}'$ le plan passant par A' et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(i) Soit M un point de $\mathcal{P}$. Il existe x et y deux réels tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Soit $M' = h(M)$. On a d'après la propriété fondamentale de la translation :

$$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM} = kx\vec{u} + ky\vec{v}$$

et donc $M' \in \mathcal{P}'$.
Donc l'image de $\mathcal{P}$ est incluse dans $\mathcal{P}'$: $h(P) \subset P'$.

(ii) Soit $N' \in \mathcal{P}'$. Il existe x' et y' deux réels tels que : $\overrightarrow{A'N'} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. Comme h est une transformation, il existe un unique point N tel que :$h(N) = N'$. De plus $h(A) = A'$. Donc N et A sont les images par la transformation réciproque de h de N' et A'. Donc, d'après la propriété fondamentale appliquée à cette homothétie réciproque :

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'N'} = \frac{1}{k}x'\vec{u} + \frac{1}{k}y'\vec{v}$$

donc $N \in \mathcal{P}$. Donc chaque point de $\mathcal{P}'$ est l'image d'un point qui appartient à $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}'$ est inclus dans l'image de $\mathcal{P}$: $h(P) \supset P'$.
Donc l'image de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}'$ dans son intégralité : $h(P) = P'$.
Ces plans sont parallèles car dirigés par le même couple de vecteurs.

Preuve de 2 : Montrons cela par double inclusion :
(i) Soient A et B deux points d'une droite d, d'images respectives par h A' et B'. Soit M un point de d. Alors A, B et M sont alignés et donc par conservation de l'alignement A', B' et M' sont alignés. Donc M' appartient à (A'B').
Donc l'image de (AB) est incluse dans (A'B') : $h((AB)) \subset (A'B')$.
(ii) Soit $N' \in (A'B')$, alors comme h est une transformation, il existe un unique point N tel que : $h(N) = N'$. De plus ,$h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et N', A' et B' sont alignés, alors N, A et B sont alignés, comme images par la transformation réciproque de N', A' et B', donc $N \in (AB)$.
Donc chaque point de (A'B') est l'image d'un point qui appartient à (AB) : (A'B') est inclus dans l'image de (AB) : $h((AB)) \supset (A'B')$.
Donc l'image de (AB) est (A'B') dans son intégralité : $h((AB)) = (A'B')$.

Comme de plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, on a (AB)//(A'B').

La démonstration de 3 est analogue.

Preuve de 4 : Montrons cela par double inclusion :
(i) Soit O le centre du cercle, noté $\mathcal{C}$, et R son rayon. Soit O' l'image de O par h.
Soit $M \in \mathcal{C}$. Soit M' l'image de M par h.
Comme l'image d'un segment est un segment de longueur multipliée par $|k|$ et d'extrémités les images des extrémités du segment de départ, on a $O'M' = |k|OM = |k|R$: et donc M' appartient au cercle de centre O' de rayon R.
Donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ est incluse dans le cercle de centre O' de rayon $|k|R$, noté $\mathcal{C}'$.
(ii) Soit $N' \in \mathcal{C}'$, alors comme h est une transformation, il existe un unique point N tel que : $h(N) = N'$. De plus $h(O) = O'$. Donc O et N sont les images par la transformation réciproque de t de O' et N' et donc : $ON = |\frac{1}{k}| \times O'N' = |\frac{1}{k}| \times |k|R = R$ et N appartient à $\mathcal{C}$.
Donc chaque point de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un point qui appartient à $\mathcal{C}$, autrement dit $\mathcal{C}'$ est inclus dans l'image de $\mathcal{C}$.
Par suite, l'image de $\mathcal{C}$ par h est le cercle $\mathcal{C}'$ dans son intégralité.