Suites

1. Généralités

1.1. Définition

Définition : On appelle suite une fonction sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Exemples:
Les fonctions:
u : n $\longmapsto$ 2n+1 ; v : n $\longmapsto$ n π sont des suites.

Notation. Vocabulaire :
Soit u une suite définie sur D partie de $\mathbb{N}$. Soit n un entier de d. Alors on note $u_n=u(n)$. On dit que u_n est le terme général de la suite et on note la suite (u_n) . n est appelé l'indice.
u_{n+1} est appelé le terme suivant de u_n. u_n et u_{n+1} sont appelés des termes consécutifs.
u_{n-1} s'il existe est appelé le terme précédent de u_n.
Soit m le plus petit élément de D, alors u_m est appelé le premier terme ou terme initial de la suite.

Remarque :
Si $D=\mathbb{N}$, le premier terme de la suite (u_n) est u_0

Exemples:
La suite: u : n $\longmapsto$ 2n+1 est ainsi appelée la suite (u_n) de terme général $u_n=2n+1$.

1.2. Comment générer une suite ?

On a essentiellement trois moyens de générer une suite :

i. se donner une liste finie ou non de nombres...

Exemple :
1;3;5;7;8;11;13;15;17;19;21 est une suite comportant 11 éléments.
Les décimales de π constituent une suite.

ii. de manière explicite : dans ce cas, $u_n=f(n)$

Exemple : $u_n=\dfrac{2n+1}{5n-3}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

iii. de manière implicite : dans ce cas, on parle de formule de récurrence. On a alors dans le cas le plus simple une expression du type : $u_{n+1}=f(u_n)$, et il faut donc donner le terme initial pour générer la suite.

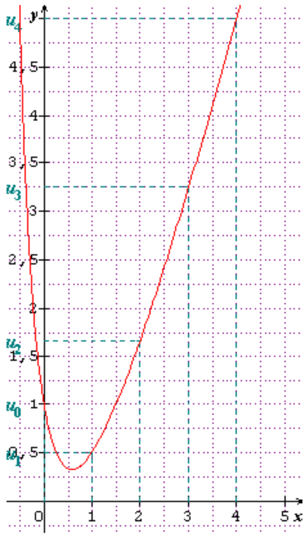
Exemples : $u_{n+1}=u_n+5$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec par exemple $u_0=-7$ ou encore : $v_{n+1}=3v_n$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec $v_0=-5$.

1.3. Représentation graphique d'une suite

1.3.1. Cas des suites définies de manière explicite

On suppose que la suite est de terme général : $u_n=f(n)$
Dans ce cas, à chaque valeur de n en abscisse correspond un terme de la suite u_n en ordonnée.

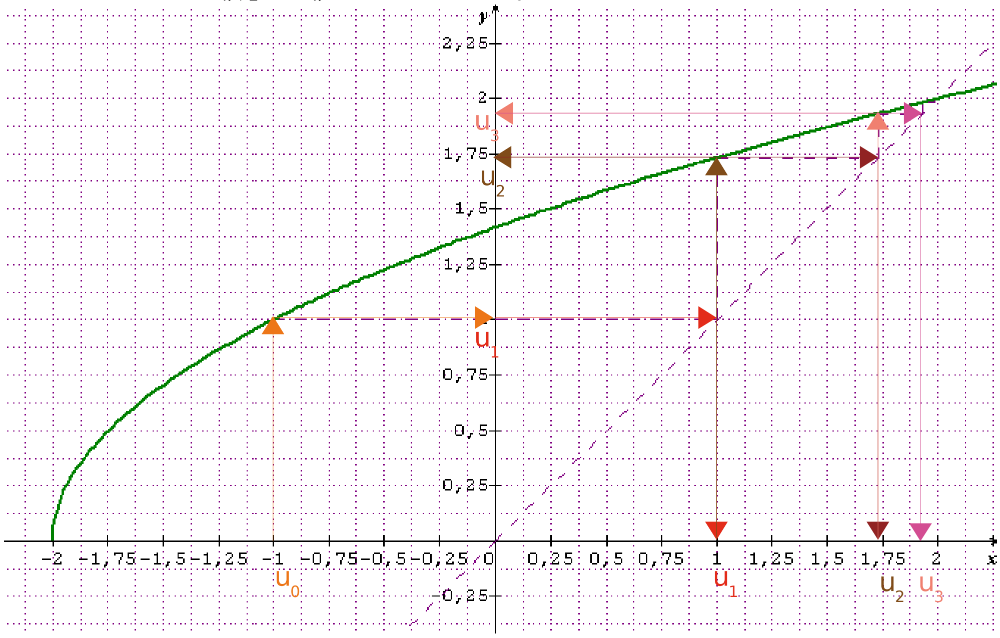
Exemple : *On considère la suite de terme général* $u_n=\dfrac{2n^2-2n+1}{n+1}$.
Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



1.3.2. Cas des suites définies de manière implicite

On suppose que la suite est de terme général : $u_{n+1}=f(u_n)$, u_0 étant donné.
Alors, on construit les termes de proche en proche, en s'aidant de la droite d'équation $y=x$.
Ainsi u_1 est l'image de u_0 par f . Donc sa valeur est lue sur l'axe des ordonnées. Puis on reporte u_1 sur l'axe des abscisses en s'aidant de la droite d'équation $y=x$ et ainsi de suite.

<u>Exemple :</u> On considère $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$, avec $u_0=-1$



1.4. Sens de variation d'une suite

<u>Définition :</u> Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$.
On dit que (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel supérieur ou égal à p, on a : $u_{n+1}\geqslant u_n$.
On dit que (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel supérieur ou égal à p, on a : $u_{n+1}\leqslant u_n$.

<u>Remarque :</u> Pour étudier les variations d'une suite, on peut aussi étudier :

- le signe de $u_{n+1}-u_n$: si pour tout $n\geqslant p$ il est positif la suite sera croissante, sinon la suite sera décroissante.
- si la suite est strictement positive à partir d'un certain rang, de regarder le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si ce rapport est supérieur strictement à 1 pour tous les termes au delà d'un

certain rang la suite est croissante (strictement), sinon si ce rapport est inférieur strictement à 1 pour tous les termes au delà d'un certain rang elle est décroissante.

- Pour une suite définie explicitement, du type $u_n=f(n)$, le sens de variation de f.
- Pour une suite définie implicitement, du type $u_{n+1}=f(u_n)$, u_0 étant donné, avec f croissante, il suffit de comparer les deux premiers termes et par récurrence deux termes consécutifs.

<u>Exemples :</u>

1. On considère la suite de terme général : $u_n=n^2-3n-7$. Alors : $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-3(n+1)-7-\left(n^2-3n-7\right)=n^2+2n+1-3n-3-7-n^2+3n+7=n^2+2n-2$.
Or, $\Delta=4+8=12$ et donc $n_1=\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}\leqslant 0$ et $n_2=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$. De plus, $0\leqslant n_2\leqslant 1$. Donc $u_{n+1}-u_n$ est positif pour $n\geqslant 1$, ce qui signifie que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
2. On considère la suite de terme général : $u_n=\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}$.
Cette suite ne s'annule pas. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{n+3}{n+2}}{\dfrac{n+2}{n+1}}}=\sqrt{\dfrac{n+3}{n+2}\times\dfrac{n+1}{n+2}}=\sqrt{\dfrac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}}\leqslant 1$ et donc (u_n) est décroissante.
3. On considère la suite de terme général : $v_n=n+\sqrt{n}$. On considère la fonction : $f(x)=x+\sqrt{x}$. On a : $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\geqslant 0$. Donc f est croissante, et donc (v_n) est croissante.
4. On considère la suite définie par : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$, et $u_0=1$. On considère la fonction : $f(x)=\sqrt{x+1}$. f a les mêmes variations que la fonction racine carrée , elle est donc croissante sur $[-1;+\infty[$.
$u_1-u_0=\sqrt{2}-1\geqslant 0$. Par suite, on a : $u_1\geqslant u_0$. Comme f est croissante, $f\left(u_1\right)\geqslant f\left(u_0\right)$, et donc $u_2\geqslant u_1$.
On suppose que $u_n\geqslant u_{n-1}$, alors comme f est croissante, $f\left(u_n\right)\geqslant f\left(u_{n-1}\right)$ et donc $u_{n+1}\geqslant u_n$.
Donc pour tout entier n, on a : $u_{n+1}\geqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

2. Suites particulières

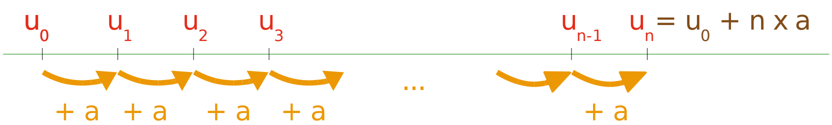
2.1. Suites arithmétiques

<u>Définition :</u> On appelle suite arithmétique une suite où l'on passe, en partant du terme initial, d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité, appelée <u>raison</u> de la suite.
En notant (u_n) une telle suite et a la raison, on a : $u_{n+1}=u_n+a$.

<u>Exemple :</u> Une usine fabrique des ramettes de papier, emballées dans des cartons par 5, chaque carton pesant 2,5 kg qu'elle empile alors sur une palette en bois de 20 kg. On note (u_n) la suite correspondante à la masse totale du chargement.
Alors $u_{n+1}=u_n+2{,}5$, avec $u_0=20$.

<u>Propriété :</u> Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a et de premier terme u_0 .
Alors : $u_n=u_0+n\times a$.

Schématiquement, on peut représenter cela comme suit :



Exemple : Avec la suite précédente : $u_n = 20+2{,}5\times n$
Ainsi, si on met 100 cartons sur la palette : $u_{100}=20+2{,}5\times 100=270 \text{ kg}$.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a. Soit p et q deux entiers.
Alors : $u_q = u_p + (q-p)\times a$.

Exemple :
La fabrication d'un objet comporte un coût fixe et un coût proportionnel au nombre d'objets fabriqués. On sais que pour 50 objets fabriqués, le coût est de 200 € et qu'il est de 375 € pour 100 objets fabriqués.
Déterminer le coût proportionnel. Le coût fixe.

Sens de variation d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a.
Si $a>0$, alors (u_n) est croissante.
Si $a=0$, alors (u_n) est constante.
Si $a<0$, alors (u_n) est décroissante.

Somme de termes d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a. Soit p et q deux entiers, avec m < n.
Alors : $\sum_{i=m}^{n} u_i = u_m + \ldots + u_n = (n-m+1)\dfrac{u_m+u_n}{2}$, c'est à dire :
$\text{somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Preuve :
On note S la somme : $S = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$.
Par suite : $2S = S+S = \begin{array}{l} u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ +u_n + u_{n-1} + \ldots + u_{m+1} + u_m \end{array}$. Comme $u_k = u_0 + k\times a$, la somme terme à terme (l'un en dessous de l'autre) donne : $2u_0 + (m+n)a = u_m + u_n$ et ceci $n-m+1$ fois.
D'où : $2S = (n-m+1)\times(u_m+u_n)$ et donc : $S = (n-m+1)\times\dfrac{u_m+u_n}{2}$.

Cas particulier important : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a, de premier terme u_0 .
Alors : $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$, c'est à dire :
$\text{somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Preuve directe :
On note S la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Par suite : $2S = S+S = \begin{array}{l} u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ +u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 \end{array}$. Comme $u_k = u_0 + k\times a$, la somme terme à terme (l'un en dessous de l'autre) donne : $2u_0 + na = u_0 + u_n$ et ceci $n+1$ fois.
D'où : $2S = (n+1)\times(u_0+u_n)$ et donc : $S = (n+1)\times\dfrac{u_0+u_n}{2}$.

Exemple :
Calculer la somme des n premiers entiers.
Pour générer les n premiers entiers on considère la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0. Alors, la somme des n premiers entiers équivaut à la somme des n+1 premiers termes de cette suite et vaut : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2. Suites géométriques

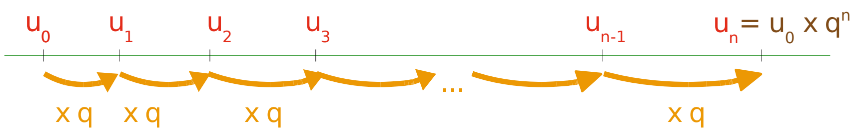
Définition : On appelle suite géométrique une suite où l'on passe, en partant du terme initial, d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité, appelée raison.
En notant (u_n) une telle suite et q la raison, on a : $u_{n+1}=q\times u_n$.

NB : En 1ES, on se limite à une raison positive.

Exemple : *Une banque rémunère un compte sur livret à 3 % l'an. On verse 100 €. On note (u_n) la suite correspondant à l'argent sur le livret au bout de n années. Expliciter (u_n) .*
Alors $u_{n+1}=u_n\times 1{,}03$, avec $u_0=100$.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q et de premier terme u_0 .
Alors : $u_n=u_0\times q^n$.

Schématiquement, on peut représenter cela comme suit :



Exemple : Avec la suite précédente : $u_n=100\times 1{,}03^n$
Ainsi, au bout de 10 ans l'épargne sera de : $u_{10}=100\times 1{,}03^{10}\approx 134{,}4$ €.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q. Soit m et n deux entiers.
Alors : $u_n=u_m\times q^{n-m}$.

Exemple :
Un épargnant a placé de l'argent au taux de 2 %. Au bout de 2 ans, il a 156,06 € sur son compte. Quelle sera la somme qu'il aura au bout de 5 ans ?
$u_5=u_2\times 1{,}02^{5-2}=156{,}06\times 1{,}02^3\approx 165{,}61$ €.

Sens de variation d'une suite géométrique à raison positive :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison q>0.
Si $q>1$, alors (u_n) est croissante.
Si $q=1$, alors (u_n) est constante.
Si $0<q<1$, alors (u_n) est décroissante.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison q positive, différente de 1.
Alors : $\sum_{i=m}^{n} u_i=u_m+\ldots+u_n=u_m\dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$, c'est à dire :

$$\text{somme de termes consécutifs d'une suite géométrique}=\text{premier terme}\times\frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} .$$

Preuve : On note S la somme : $S=u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n$.
Comme pour tout k, $q\times u_k=u_{k+1}$, $q\times S=q\times u_m+q\times u_{m+1}+\ldots+q\times u_n$
$=u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{n+1}$

Par suite : $q\times S-S=$ $u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_n+u_{n+1}$
$-u_m-u_{m+1}-\ldots-\ldots-u_n$
$=-u_m+u_{n+1}$

D'où : $(q-1)S=-u_m+u_m\times q^{n-m+1}=u_m\left(-1+q^{n-m+1}\right)$ et donc, si $q\neq 1$: $S=u_m\dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

Cas particulier important : Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison q, avec $q \neq 1$, de premier terme u_0 .

Alors : $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, c'est à dire :

Preuve directe : On note S la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Comme pour tout k entre 0 et n, $q \times u_k = u_{k+1}$, $q \times S = q \times u_0 + q \times u_1 + \ldots + q \times u_n$

$$= u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$$

Par suite : $q \times S - S = \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}$

$$-u_0 - u_1 - \ldots - \ldots - u_n$$

$$= -u_0 + u_{n+1}$$

D'où : $(q-1)S = -u_0 + u_0 \times q^{n+1} = u_0(-1+q^{n+1})$ et donc, si $q \neq 1$: $S = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple :

Calculer la somme des n premières puissances de 2.

$v_n = 2^n$: (v_n) est une suite géométrique de raison 2, de premier terme 1.

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = v_0 + \ldots + v_n = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$

3. Convergence d'une suite

3.1. Généralités

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est convergente et a pour limite l si pour tout intervalle ouvert contenant l , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle.

Propriété : (u_n) est convergente et a pour limite l ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$

Soit $\epsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$.

Soit N le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$. Alors : pour tout $n \geqslant N$, on a : $|u_n| < \epsilon$. Et donc (u_n) est convergente et a pour limite 0.

Sur le même principe, on montre que $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ convergent et ont pour limite 0.

Remarques : 1. Il y a donc un nombre fini de termes en dehors de l'intervalle $]l-\epsilon; l+\epsilon[$.

2. Cela revient à écrire que :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $|u_n - l| < \epsilon$.

Autrement dit que l'inégalité $|u_n - l| < \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang.

3. Cela revient aussi à dire que :

la double inégalité : $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$ est vraie à partir d'un certain rang.

Propriété : Si (u_n) est convergente de limite l , alors l est unique.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe l_1 et l_2, avec $l_1 \neq l_2$, deux limites de la suite (u_n) convergente.

Comme $l_1 \neq l_2$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que : $|l_1 - l_2| = \epsilon$

Comme (u_n) est convergente de limite l_1, il existe un rang N_1 à partir duquel on a pour tout $n \geqslant N_1$, on a : $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$.
Comme (u_n) est convergente de limite l_2, il existe un rang N_2 à partir duquel on a pour tout $n \geqslant N_2$, on a : $|u_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$.
Par suite, à partir d'un rang N correspondant au maximum de N_1 et N_2, on a :
$|l_1 - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, ce qui est contradictoire.
et donc $l_1 = l_2$.

<u>Notation :</u> Soit (u_n) une suite convergente de limite l. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

<u>Définition :</u> Une suite qui ne converge pas est appelé une <u>suite divergente</u>.

<u>Définition :</u> On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]a; +\infty[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; b[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans cet intervalle. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

<u>Propriété :</u> (u_n) admet pour limite $+\infty$ ssi pour tout $A > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n > A$.
(u_n) admet pour limite $-\infty$ ssi pour tout $A < 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : . $u_n < A$.

<u>Exemple :</u> $u_n = \sqrt{n}$
Soit $A > 0$. $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$. Soit N le premier entier supérieur à A^2. Alors : pour tout $n \geqslant N$, on a : $u_n > A$. On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Sur le même principe, on montre que (n^2) et $(\sqrt{n})$ divergent et ont pour limite $+\infty$.

<u>Propriété :</u> Soit l un réel.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $|u_n - l| \leqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

<u>Applications :</u> Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

3.2. Opérations sur les limites

<u>Propriété :</u> Soient (u_n) et (v_n) deux suites :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) =$ alors	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Propriété : Soient (u_n) et (v_n) deux suites :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ Ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Propriété : Soient (u_n) une suite :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n>0$	0 avec $u_n<0$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) =$	$\dfrac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3.3. Comparaison de suites

Propriété : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites l et l', alors $l \leqslant l'$.

Preuve : Comme à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$, il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, on a : $u_n \leqslant v_n$.
Comme (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives l et l', il existe N_2 et N_3 tels que :

pour $n \geqslant N_2$, on a : $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$
et pour $n \geqslant N_3$, on a $l'-\epsilon < v_n < l'+\epsilon$: .

Par suite, pour $N=\max(N_1;N_2;N_3)$, on a pour $n \geqslant N$: $l-\epsilon < u_n \leqslant v_n < l'+\epsilon$.
et donc $l \leqslant l'$.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de limites l, alors (v_n) est convergente et admet pour limite l.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$
Il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Comme (u_n) et (w_n) sont convergentes de limites l, il existe N_2 et N_3 tels que :

pour $n \geqslant N_2$, on a : $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$
et pour $n \geqslant N_3$, on a : $l-\epsilon < w_n < l+\epsilon$.

Par suite, pour $N=\max(N_1;N_2;N_3)$, on a pour $n \geqslant N$: $l-\epsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < l+\epsilon$.
Et donc (v_n) est convergente et admet pour limite l.

Exemple : Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Pour $n \geqslant 1$, on a : $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Et donc comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Propriété : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$.
(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) diverge et a pour : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) diverge et a pour : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Comme à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$, il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, on a : $u_n \leqslant v_n$.
Soit $A > 0$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe N_2 tel que :
pour $n \geqslant N_2$, on a : $u_n \geqslant A$.
Par suite, pour $N = \max(N_1; N_2; N_3)$, on a pour $n \geqslant N$: $v_n \geqslant u_n \geqslant A$.
Et donc : (v_n) diverge et a pour : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
La preuve pour (ii) est analogue.

Application : Calculer la limite, si elle existe, de la suite (u_n), avec : $u_n = \dfrac{2n^3 + 3n^2}{n^2}$

3.4. Limite des suites arithmétiques et géométriques

Propriété : Soient (u_n) une suite arithmétique de raison a.
Si $a > 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Si $a < 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : $u_n = u_0 + na$, donc comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et que
si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} an = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
si $a < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} an = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété : Soient (u_n) une suite géométrique de raison q, de premier terme $u_0 > 0$
(i) Si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
(ii) Si $-1 < q < 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
(iii) Si $q = 1$, alors la suite est constante et : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
(iv) Si $q \leqslant -1$, alors la suite diverge.

Preuve : (i) Soit $q > 1$.
On considère pour $n \geqslant 2$, la fonction f définie sur $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = (1+x)^n - (1+nx).$$

Pour $x \geqslant 0$, on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$, et donc $f'(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$. On a en particulier $f(0) = 0$.
Comme on a $q - 1 > 0$ et comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, on a : $f(q-1) \geqslant f(0)$ et donc : $(1 + q - 1)^n - (1 + n(q-1)) \geqslant 0$.
Donc : $q^n \geqslant 1 - n + nq$.
Par suite, comme : $\lim\limits_{n \to +\infty} nq = +\infty$ et par les théorèmes de comparaison, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

(ii) Soit $0 < q < 1$. On pose : $q' = \dfrac{1}{q}$. On a : $q' > 1$ et $q^n = \dfrac{1}{q'^n}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q'^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{q'^n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q = 0$, la suite est constante, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
Si $-1 < q < 0$, on pose $q' = |q|$. On a : $0 < q' < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q'^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} -q'^n = 0$.
Or $-q'^n \leqslant q^n \leqslant q'^n$, car $|q^n| = q'^n$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
(iii) Immédiat, la suite étant constante.

(iv) Les valeurs de q^n sont alternativement dans $]-\infty;-1]$ et dans $[1;+\infty[$. Donc la suite ne peut admettre ni $+\infty$, ni $-\infty$ comme limites.
Si la suite admet l comme limite, alors tout intervalle ouvert contenant l, contiendrait un nombre infini de valeurs de la suite à partir d'un certain rang. Soit I un tel intervalle, alors I contiendrait des nombres à la fois inférieurs à -1 et d'autres supérieurs à 1. Donc I serait au minimum de longueur 2. Ce qui n'est pas le cas de tous les intervalles. Par exemple : $I=]l-0,5;l+0,5[$.
Donc la suite ne converge pas vers l, et donc elle est divergente.