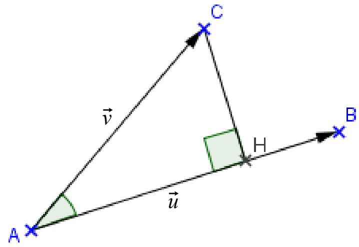
1. Produit scalaire de deux vecteurs

1.1. Définition



Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ (qui se lit $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$) le réel définit par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\begin{cases} AB\times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB\times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés}\end{cases}$$

Si l'un des vecteurs est nul, on pose, par définition : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ (noté $\overrightarrow{u}^2$): $\overrightarrow{u}^2=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$.
On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ et on note $\|\overrightarrow{u}\|$: $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$.

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de D sur (AB)

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$$

$\overrightarrow{HK}$ est appelé le vecteur projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Preuve : Soit E le point tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{u}$ et E' le projeté orthogonal de E sur (AB). On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\times AE'.$$

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel. On a : $\|k\overrightarrow{u}\|=|k|\|\overrightarrow{u}\|$

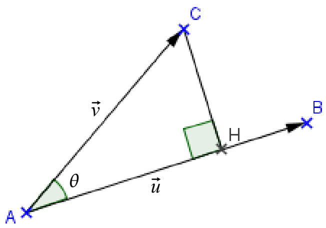
Preuve : Soient A et B des points tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$. Soit C un point tel que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$. On a $AC=|k|AB$. D'où : $\overrightarrow{v}^2=AC^2=k^2AB^2$, d'où le résultat en passant à la racine carrée : $\|k\overrightarrow{u}\|=|k|\|\overrightarrow{u}\|$

1.2. Lien entre produit scalaire, norme et cosinus

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

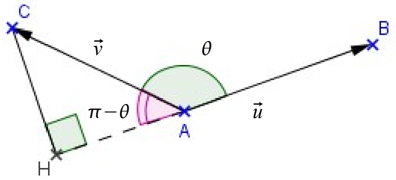
Preuve : Soient A, B et C des points tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On note $\theta=\widehat{BOC}$
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens : d'où : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=AB\times AC\times\cos\theta$.



alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=AB\times AH$.
Or, dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\cos\theta=\frac{AH}{AC}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires :



alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -AB \times AH$.
Or, dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{AC}$$

D'où : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -AB \times AC \times \cos(\pi - \theta)$
$= AB \times AC \times \cos\theta$

et comme $\cos\theta = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $AB = \|\overrightarrow{u}\|$, $AC = \|\overrightarrow{v}\|$, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

1.3. Vecteurs orthogonaux

Définition : On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Propriété : Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si soit l'un d'entre est nul, soit leurs directions sont orthogonales.

1.4. Propriétés

Propriété : Soit trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et k un réel.
Alors : (i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
(ii) $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
(iii) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

Preuve : (i) Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, l'égalité est vérifiée.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
d'où, comme $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a : $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et la multiplication étant commutative, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
(ii) Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, l'égalité est vérifiée.
Si $k = 0$, l'égalité est vérifiée.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors :

si $k > 0$, $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|k\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v})$
$= \|\overrightarrow{u}\| \times |k| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v})$

Or : $(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $|k| = k$ car $k > 0$, d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) &= k\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\end{aligned}$$

si $k < 0$, $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|k\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v})$
$= \|\overrightarrow{u}\| \times |k| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v})$

Or : $(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{kv}\right) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $|k| = -k$ car $k > 0$, d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) &= -k\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})) \\ &= -k\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times (-\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})) \\ &= k\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\end{aligned}$$

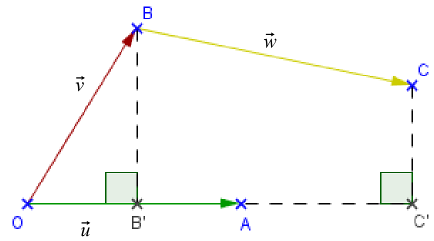
(iii) Soit O, A, B et C quatre points du plan tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} \text{ , } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{w} \text{ .}$$

Soit B' (resp. C') le projeté orthogonal de B (resp. C) sur (OA).

Les vecteurs $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires car B' et C' appartiennent à (OA), donc il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{OB'} \text{ .}$$



On a donc : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B'C'}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} \cdot \left(k\overrightarrow{OB'}\right)$$

$$= (1+k)\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$$

Or, $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}\right)$ et $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'C'}$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \qquad\qquad = (1+k)\,\overrightarrow{OB'}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'}$$

donc : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

1.5. Expression analytique du produit scalaire

<u>Propriété :</u> On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

<u>Preuve :</u> On a : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$

D'où : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) \cdot \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right)$

$$= x\overrightarrow{i} \cdot \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right) + y\overrightarrow{j} \cdot \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right)$$

$$= xx'\overrightarrow{i}^2 + xy'\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yx'\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j}^2$$

Or, $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = 1$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0$, d'où : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

<u>Conséquence :</u> On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur.

On a : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Applications

2.1. Projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe

Propriété : Soit $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ le repère normé d'un axe.

Le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sur cet axe est le vecteur $\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}\right) \overrightarrow{i}$

Preuve : Soit $\overrightarrow{j}$ le vecteur unitaire tel que $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ soit un repère orthonormal.

$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, d'où : $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \cdot \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) = x$

Soit $\overrightarrow{u'}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$. $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.

$\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, d'où : $y' = 0$. D'où : $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i}$, d'où : $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{i} \cdot \left(x'\overrightarrow{i}\right) = x'$

Or $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u'}$, d'où : $x = x'$ et donc : $\overrightarrow{u'} = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}\right) \overrightarrow{i}$.

2.2. Équation d'une droite de vecteur normal donné

Définition : On appelle vecteur normal à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de la droite.

Propriété : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit d une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ passant par un point de coordonnées

$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, si a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve : Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in d$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ ssi $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. En posant $c = -ax_0 - by_0$, on a le résultat annoncé.

Réciproque : On considère l'ensemble E des points $M(x; y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls.

Soit $A(x_0; y_0)$ un point de d.

Par exemple, si a est non nul celui d'ordonnée nulle convient, on a alors $A\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ et si a est nul, celui d'abscisse nulle convient et $A\left(0; -\frac{c}{b}\right)$. On a dans les deux cas : $ax_0 + by_0 + c = 0$

Par suite, $M(x; y) \in E$ ssi $ax + by + c = 0$ ssi $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c = 0$, car $ax_0 + by_0 + c = 0$.

$M(x; y) \in E$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, et M est sur la droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

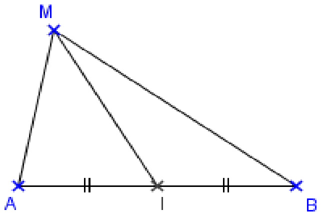
2.3. Relations métriques dans le triangle

2.3.1. Théorème de la médiane

Théorème de la médiane : Soit A et B deux points du plan et soit I le milieu de [AB].

Soit M un point du plan. Alors :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Preuve : $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$=MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2$$

Or comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ et $IA^2=IB^2=\dfrac{AB^2}{4}$

$MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$

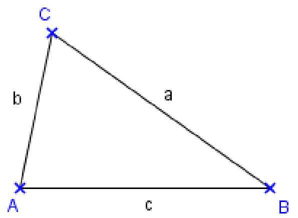
2.3.2. Relations métriques dans le triangle : formule d'Al-Kashi

Propriété : Pour tout triangle ABC :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$.



Preuve : $a^2=BC^2$

$$=\overrightarrow{BC}^2$$

$$=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$$

$$=\overrightarrow{BA}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$$

$$=c^2+b^2-2bc\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

Idem pour b^2 et c^2.

2.4. Équation d'un cercle

Propriété : Soit A et B deux points du plan.

L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre [AB]

Preuve : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ ssi $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$ ou $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

ssi A=M ou B=M ou le triangle AMB est rectangle en M
ssi M appartient au cercle de diamètre [AB].

Conséquence : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $(x_A;y_A)$ les coordonnées de A et $(x_B;y_B)$ celles de B.
$M(x;y)$ appartient au cercle de diamètre [AB] ssi $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Propriété : On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon R. Une équation de $(\mathcal{C})$ est :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$

Preuve : $M(x;y)\in(\mathcal{C})$ ssi $\Omega M=R$ ssi $\Omega M^2=R^2$ ssi $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$.