Limites

1. En l'infini

1.1. Limite infinie en l'infini

Exemple : *On considère la fonction :* $f : x \longmapsto x^2$.

1. *Compléter le tableau suivant :*

x	10	100	1000		
$f(x)$				10^{12}	10^{16}

2. *Soit A fixé, positif, suffisamment grand. Peut-on trouver une valeur* x_0 *de* x *telle que pour tout* x *supérieur ou égal à* x_0, $f(x)$ *soit supérieur ou égal à A ?*
3. *Faire un tableau similaire pour la fonction* $g : x \longmapsto x^2 + 3x + 5$. *Que constate-t-on?*

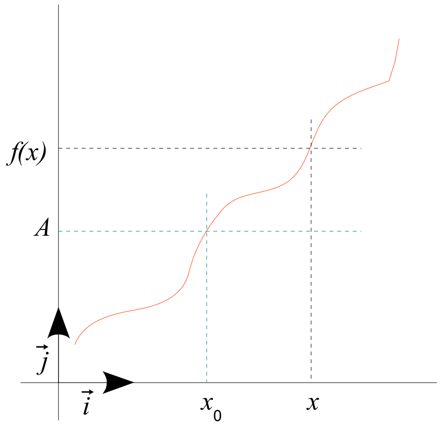
Réponse :

1.

x	10	100	1000	10^6	10^8
$f(x)$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{16}

2. On cherche finalement à résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant \text{A}$, c'est à dire : $x^2 \geqslant \text{A}$. Ce qui a lieu dès que $x \geqslant \sqrt{\text{A}}$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [a ; $+\infty$[.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f(x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

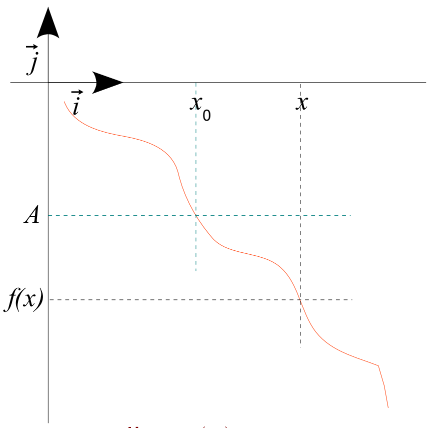
Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:

$x \longmapsto x$; $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto \sqrt{x}$

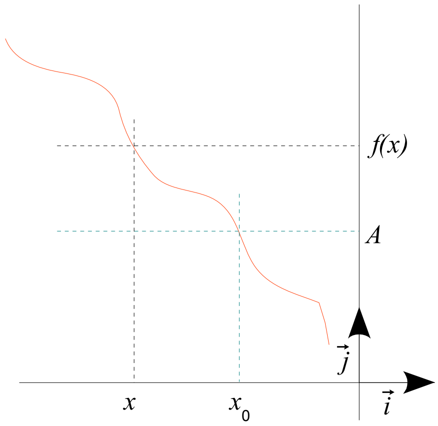
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [a ; $+\infty$[.
Par définition, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$

Exemple :
Les fonctions suivantes ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$:

$x \longmapsto -x$; $x \longmapsto -x^2+1$; $x \longmapsto -x^3$; $x \longmapsto -\sqrt{x}$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

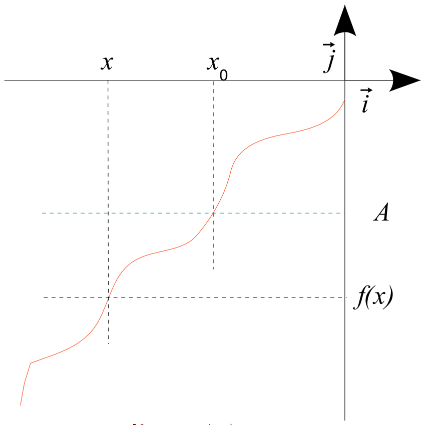


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞ ; a].
On dit que f admet pour limite +∞ en -∞ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f(x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x \leqslant x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite +∞ quand x tend vers -∞ :

$$x \longmapsto x^2 \ ; \ x \longmapsto x^4$$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞ ; a].
Par définition, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} -f(x) = +\infty$.

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite -∞ quand x tend vers -∞ :

$$x \longmapsto x \ ; \ x \longmapsto x^3.$$

1.2. Limite finie en l'infini

Exemple : *On considère la fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$*

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	100	1000		
$f(x)$				10^{-12}	10^{-16}

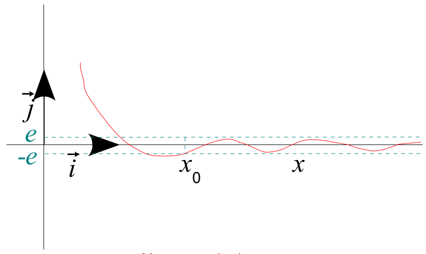
2. Soit e fixé, positif, suffisamment proche de 0. Peut-on trouver une valeur x_0 de x telle que pour tout x supérieur ou égal à x_0, $f(x)$ soit inférieur ou égal à e ?

Réponse :
1.

x	10	100	1000	10^{12}	10^{16}
$f(x)$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-12}	10^{-16}

2. On cherche finalement à résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant \mathrm{e}$, c'est à dire : $0 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \mathrm{e}$. Ce qui a lieu dès que $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [a ; $+\infty$[.
On dit que f admet pour limite 0 en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f(x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel e, il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, on a : $|f(x)| \leqslant e$.
On note alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

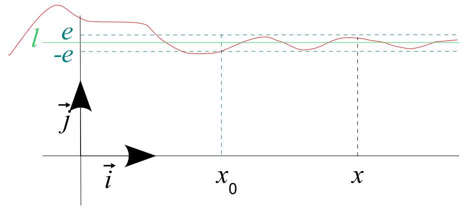


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$:

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \;;\; x \longmapsto \frac{1}{x^2} \;\ldots$$

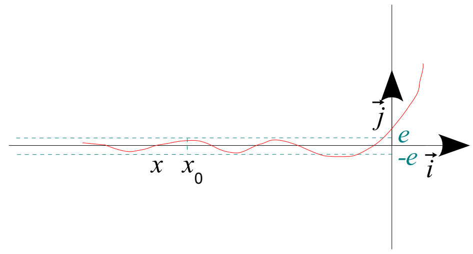
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [a ; $+\infty$[.
On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ si $f(x)$-l a pour limite 0 en $+\infty$.
On note alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.



Exemple : La fonction suivante a pour limite 3 quand x tend vers $+\infty$:

$$x \longmapsto 3 + \frac{1}{x}$$

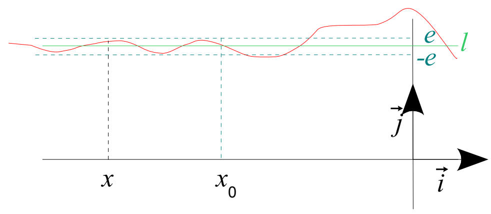
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞ ; a].
On dit que f admet pour limite 0 en -∞ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f(x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
On note alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Exemple : Les fonctions suivantes ont pour limite 0 quand x tend vers -∞ :

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \;;\; x \longmapsto \frac{1}{x^2} \;\ldots$$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞ ; a].
On dit que f admet pour limite l en -∞ si $f(x)$-l a pour limite 0 en -∞.
On note alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.



Exemple : La fonction suivante a pour limite -3 quand x tend vers -∞ :

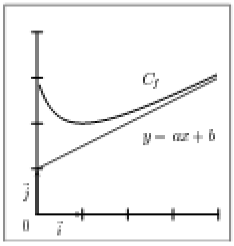
$$x \longmapsto \frac{1}{x} - 3.$$

1.3. Asymptotes

1.3.1. Asymptote oblique

Définition : On dit que la droite d : y = ax + b est asymptote oblique à la courbe d'une fonction f en $+\infty$ (resp. -∞) si f(x)-(ax+b) admet une limite en $+\infty$ (respectivement -∞) et que celle-ci vaut 0.

Graphiquement :



<u>Exemple :</u>
$f(x)=\dfrac{4x^2+3x+1}{x}$ admet la droite d'équation y = 4x + 3 comme asymptote oblique.

<u>Etude de la position relative.</u>
Etude du signe de f(x)-(ax+b)
Si positif sur I alors la courbe de f est au dessus de d, si négatif en dessous.

<u>1.3.2. Asymptote horizontale</u>
On dit que la droite d: y = l est asymptote horizontale à la courbe d'une fonction f en +∞ si $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$
Idem en – inf.

Exemple 3+2/x

Etude de la position relative : Signe de f(x)-l si positif sur I courbe au dessus de l'asymptote, si négatif en dessous.

2. Limite en a

2.1. Limite infinie en a

<u>Remarque :</u> On ne se pose la question que dans le cas où f n'est pas définie en a mais où a est une borne du domaine de définition de f. On se place alors toujours du même côté.

<u>Exemple :</u> *On considère la fonction :* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$.

1. a. Compléter le tableau suivant :

x	*2,1*	*2,01*	*2,001*		
$f(x)$				*10^5*	*10^6*

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures.
2. a. Compléter le tableau suivant :

x	*1,9*	*1,99*	*1,999*		
$f(x)$				*-10^5*	*-10^6*

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs inférieures.

<u>Réponse :</u>
La fonction f est définie sur : $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. On va donc se placer d'abord sur] 2 ; + ∞[(question 1) puis sur]- ∞ ; 2[(question 2).
1. a.

x	2,1	2,01	2,001	*2,00001*	*2,000001*
$f(x)$	10	100	1000	10^5	10^6

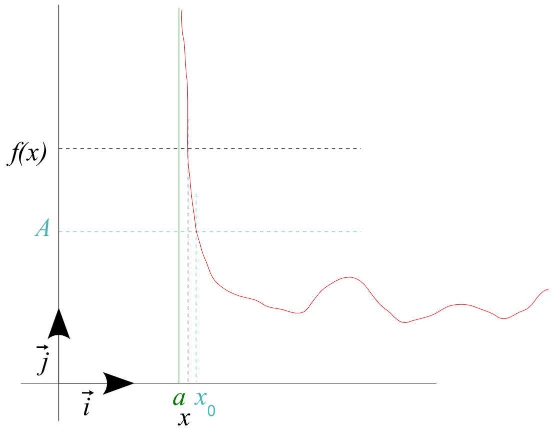
b. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$
2. a.

x	1,9	1,99	1,999	1,99999	1,999999
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10^5	-10^6

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty$

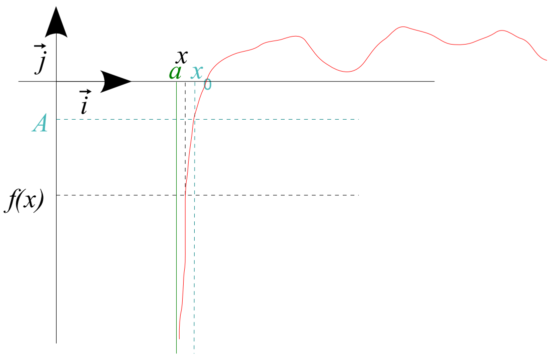
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]a ; b].
On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeurs supérieures si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f(x)$ est supérieure (respectivement est inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur supérieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$

(respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$)



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{1}{x-3} = +\infty$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [b ; a[.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeur inférieure si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f(x)$ est supérieure (respectivement est inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur inférieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$)

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{1}{x-3} = -\infty$

Asymptote verticale
La droite d'équation x=k est asymptote verticale à la courbe, si f n'est pas définie en k et si f admet une limite infinie en k (par valeurs supérieures ou inférieures)

Exemple 1/(x-2)

2.2. Limite finie en a

Remarque : On ne se pose la question que dans les cas suivants:
soit f n'est pas définie en a mais où a est une borne du domaine de définition de f. On se place alors toujours du même côté.
soit f est définie en a.

Exemple : *On considère la fonction :* $f : x \longmapsto \frac{x^2-4}{x-2}$

1. a. Compléter le tableau suivant :

x	2,1	2,01	2,001	
$f(x)$				4,00001

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures.
2. a. Compléter le tableau suivant :

x	1,9	1,99	1,999	
$f(x)$				3,99999

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs inférieures.
3. Que constate-t-on ? Pouvait-on s'y attendre ?

Réponse :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]b ; c[.
Soit a un élément de]b ; c[, éventuellement l'une des bornes (dans ce cas on précisera par valeur inférieure ou supérieure)
On dit que f admet pour limite 0 en a si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f(x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a tout en restant dans]b ; c[.
On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=0$)

Exemples : $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)^2=0$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}=0$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]b ; c[.
Soit a un élément de]b ; c[, éventuellement l'une des bornes (dans ce cas on précisera par valeur inférieure ou supérieure)
On dit que f admet pour limite l en a si $f(x)$-l a pour limite 0 en a.
On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=l$).

Exemple : $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x}=\sqrt{2}$

Propriété : Si f est définie en a et si f admet une limite en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

3. Opération sur les limites

3.1. Somme de fonctions

Soit f et g deux fonctions.
On désigne par α un nombre a, +∞ ou -∞.
Soit l et l' deux nombres.

$\lim\limits_{\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{\alpha} (f(x)+g(x))$
l	l'	l+ l'
l	+∞	+∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞
+∞	-∞	F.I.

Propriété :
Soit k un nombre non nul, si $\lim\limits_{\alpha} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{\alpha} k\,f(x)=kl$.

Si $\lim_{\alpha} f(x) = \pm\infty$ alors $\lim_{\alpha} k\, f(x) = \pm\infty$.

Exemple :

Soit $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.

3.2. Produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions.
On désigne par α un nombre a, +∞ ou -∞.
Soit l et l' deux nombres.

$\lim_{\alpha} f(x)$	$\lim_{\alpha} g(x)$	$\lim_{\alpha} f(x) \times g(x)$
l	l'	l× l'
$l \neq 0$	+∞	sgn(l)∞
$l \neq 0$	-∞	sgn(-l)∞
+∞	+∞	+∞
+∞	-∞	-∞
-∞	-∞	+∞
0	$\pm\infty$	F.I.

Exemple :
Soit $f(x) = x\sqrt{x}$. Limite en +∞ et 0

Soit $g(x) = \left(\frac{1}{x} - 3\right) \times \sqrt{x}$ Limite en +∞

3.3. Inverse de fonctions

Soit f une fonction.
On désigne par α un nombre a, +∞ ou -∞.
Soit l un nombre.

$\lim_{\alpha} f(x)$	$\lim_{\alpha} \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0	FI
0 par valeurs +	+∞
0 par valeurs -	-∞
$\pm\infty$	0

Exemple :

Limite aux bornes de $f(x) = \frac{1}{x-2}$

3.4. Quotient de fonctions

Soit f et g deux fonctions.

Pour déterminer la limite de $\frac{f}{g}$, on écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\frac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\frac{f}{g}$.

Exemple des fonctions rationnelles :