# 1. Barycentre de deux points pondérés.

## 1.1. Définition

Définition : Soit $\alpha$ un réel et A un point du plan (ou de l'espace). Le couple $(A,\alpha)$ est appelé point pondéré.

Définition : Soit $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$ deux points pondérés, tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

Alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.
Ce point est appelé le barycentre des points pondérés $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$.

Preuve : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ ssi $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0}$ ssi $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, car $\alpha+\beta\neq 0$.

Or $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ étant un vecteur fixe, l'existence et l'unicité de G est prouvée.

Remarques : 1. Si $\alpha=\beta$ alors G est appelé l'isobarycentre de A et B. Ce point est le milieu du segment [AB]
2. Si $\alpha>0$ et $\beta>0$, alors G correspond physiquement au point d'équilibre d'une tige sans masse à laquelle sont accrochés les masses $\alpha$ et $\beta$ aux extrémités A et B de la tige.

Exemple avec alpha=2 et beta=3

## 1.2. Propriétés

Propriété : On ne change pas le barycentre de deux points pondérés, si on multiplie chacun des coefficients des points pondérés par un même réel non nul.
Autrement dit, soit k réel non nul, si G est le barycentre de $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$, alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$.

Preuve : immédiate

Propriété : Soit G le barycentre de $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$ avec $\alpha+\beta\neq 0$. Soit M un point, alors :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : on utilise la relation de Chasles, avec le point M dans $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

## 1.3. Coordonnées cartésiennes

On munit le plan (respectivement l'espace) d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\left(,\vec{k}\right)\right)$

Propriété : Soit $(x_A;y_A(;z_A))$ les coordonnées de A et $(x_B;y_B(;z_B))$ celles de B. Alors les coordonnées $(x_G;y_G(;z_G))$ des points pondérés $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$ sont :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\qquad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\qquad \left(z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$$

## 2. Barycentre de trois points pondérés.

### 2.1. Définition

Définition : Soit $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ et $(C,\gamma)$ trois points pondérés, tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Ce point est appelé le barycentre des points pondérés $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ et $(C,\gamma)$.

Preuve : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ssi $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}$ ssi $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$, car $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Or $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ étant un vecteur fixe, l'existence et l'unicité de G est prouvée.

Remarque : Si $\alpha=\beta=\gamma$ alors G est appelé l'isobarycentre de A, B et C. Ce point est le centre de gravité du triangle ABC.

### 2.2. Propriétés

Propriété : On ne change pas le barycentre de deux points pondérés, si on multiplie chacun des coefficients des points pondérés par un même réel non nul.
Autrement dit, soit k réel non nul, si G est le barycentre de $(A,\alpha)$,$(B,\beta)$ et$(C,\gamma)$ , alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$,$(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$.

Preuve : immédiate

Propriété : Soit G le barycentre de $(A,\alpha)$,$(B,\beta)$ et$(C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ . Soit M un point, alors :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : on utilise la relation de Chasles, avec le point M dans $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

### 2.3. Coordonnées cartésiennes

On munit le plan (respectivement l'espace) d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\left(,\vec{k}\right)\right)$

Propriété : Soit $(x_A;y_A(;z_A))$les coordonnées de A , $(x_B;y_B(;z_B))$ celles de B et $(x_C;y_C(;z_C))$ celles de C. Alors les coordonnées $(x_G;y_G(;z_G))$ des points pondérés $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ et$(C,\gamma)$ sont :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\quad\left(z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

### 2.4. Associativité du barycentre

Théorème : Soit G le barycentre de $(A,\alpha)$,$(B,\beta)$ et$(C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ .
Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors G est également le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$et$(C,\gamma)$, où H est le barycentre de $(A,\alpha)$et$(B,\beta)$ .

Preuve : Comme G est le barycentre de $(A,\alpha)$,$(B,\beta)$ et$(C,\gamma)$, on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

En particulier, avec M=H, on a : $\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}+\gamma\overrightarrow{HC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{HG}$.

Or, H est le barycentre de $(A,\alpha)$et$(B,\beta)$ , d'où : $\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$, et donc :

$\gamma\overrightarrow{HC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{HG}$, autrement dit : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Et donc G est bien le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$et$(C,\gamma)$.