Nombre dérivé. Fonction dérivée.

1. Nombre dérivé.

1.1. Introduction

Activité 1 : D'après IREM Clermont Ferrand Activité 1

1.2.Taux d'accroissement. Limite en 0.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels distincts a et b de I.
On appelle accroissement moyen le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque : l'accroissement moyen correspond à la pente de la droite (AB) où A et B sont deux points de la courbe de f, d'abscisses respectives a et b.

En posant b=a+h, le taux d'accroissement moyen s'écrit $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

« Définition » : Soit f une fonction définie sur un domaine D tel que 0 appartienne à D.
On admet que lorsque la valeur de x se rapproche de 0, f(x) se rapproche de f(0). On appelle cela la limite de f en 0 et on note $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

1.3. Nombre dérivé.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I, qui ne soit pas une borne. Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a. On appelle alors nombre dérivé en a la valeur de la limite de ce taux d'accroissement. On note ce nombre f'(a).
Autrement dit, si f est dérivable en a, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

Exemple : Étudier si $f(x)=x-3x$ est dérivable en $a=1$

$f(1+h)=(1+h)-3(1+h)=h+2h+1-3-3h=h-h-2$

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h-h-2+2}{h}=\dfrac{h(h-1)}{h}=h-1$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-1)=-1$ et donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-1$.

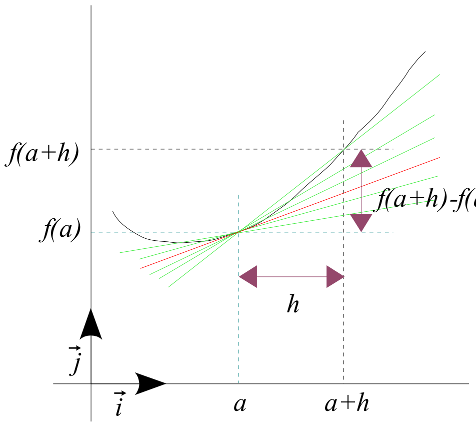
Définition : Avec les mêmes hypothèses, l'ensemble des nombres a pour lesquels $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, est appelé domaine de dérivabilité de f.

1.4. Tangente en un point.

Interprétation graphique du nombre dérivé :

On munit le plan d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f.
Soit $a\in\mathcal{D}_f$, où $\mathcal{D}_f$ est le domaine de définition de f. Soit h un réel non nul tel que $a+h\in\mathcal{D}_f$
On note $A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM)
Si f est dérivable en a, ce coefficient directeur admet pour limite $f'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Lorsque h tend vers 0, le point M se rapproche de A et la droite (AM) se rapproche d'une droite limite Δ, appelée tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a.



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I tel que f soit dérivable en a.
On appelle tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété : La tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Exemple :

On considère f: $x \longmapsto \frac{2x}{x-3}$ et a = 6

$f(6+h)=\frac{2(6+h)}{6+h-3}=\frac{12+2h}{3+h}$

$f(6+h)-f(6)=\frac{12+2h}{3+h}-4=\frac{12+2h-12-4h}{3+h}=\frac{-2h}{3+h}$ et donc $\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{-2}{3+h}$, qui tend vers $-\frac{2}{3}$ lorsque h tend vers 0. Donc f est dérivable en 6 et $f'(6)=-\frac{2}{3}$.

Par suite, la tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse 6 a pour équation : $y=4-\frac{2}{3}(x-6)$.

1.5. Approximation affine

Principe : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a « semble » très proche de la courbe pour des valeurs proches de a.
L'idée est alors de localement, au voisinage de a, remplacer la fonction f par une fonction affine la meilleure possible. On montre que cette fonction affine est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a. Ainsi $f(x)$ est remplacé par $f'(a)(x-a)+f(a)$ pour x voisin de a. Et donc en écrivant $x = a + h$ pour h voisin de 0.

Propriété-Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction ϕ telle que pour tout réel h tel que $a + h \in I$ on a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h)$ et $\lim_{h\to 0} \phi(h) = 0$.
On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a.
Autrement dit pour x proche de a : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$

Preuve : Pour $h \neq 0$, on pose $\phi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$.

Comme f est dérivable, on a : $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et donc : $\lim_{h\to 0} \phi(h) = 0$.
De plus, $h\phi(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$, d'où : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h)$. Cette

égalité reste vraie pour $h=0$.

Application : méthode d'Euler

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dont la fonction dérivée f' est explicitement connue.

Cette méthode permet de construire point par point une ligne polygonale représentant approximativement la courbe $\mathcal{C}_f$ de f connaissant un point de départ.

Dans le plan muni d'un repère :

1. On place le point de départ $M_0\,(x_0;y_0)$, avec $x_0 \in I$. On choisit un pas $h \neq 0$, proche de 0.
2. On pose $x_1 = x_0 + h$. On approche $f(x_1)$ par $f(x_0) + hf'(x_0)$. On pose : $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ et on place le point $M_1\,(x_1;y_1)$. On trace ensuite le segment $[M_0M_1]$.
3. On pose $x_2 = x_1 + h$ et on poursuit suivant le même principe ...

2. Dérivée et sens de variation.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit D le domaine de dérivabilité de f. On suppose que D est un intervalle.

Définition : La fonction, notée f', qui à tout $x \in D$, associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f sur D.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit K un intervalle inclus dans J.

Si f est croissante sur K, alors pour tout $x \in K$, $f'(x) \geqslant 0$.

Si f est décroissante sur K, alors pour tout $x \in K$, $f'(x) \leqslant 0$.

Si f est constante sur K, alors pour tout $x \in K$, $f'(x) = 0$.

Preuve : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit K un intervalle inclus dans J.

Soit $x \in K$, soit h un réel tel que $x+h \in K$.

On suppose que f est croissante.

Si $h>0$, alors $x+h>x$ et donc $f(x+h) \geqslant f(x)$ puisque f est croissante.

Si $h<0$, alors $x+h<x$ et donc $f(x+h) \leqslant f(x)$ puisque f est croissante.

Donc dans les deux cas, $f(x+h)-f(x)$ et h sont de même signe et par suite : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$.

Comme f est dérivable en x, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite réel $f'(x)$.

Comme $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$, on conçoit et on admet que par passage à la limite on a :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$.

Preuve analogue pour une fonction décroissante. Immédiat pour une fonction constante.

Théorème réciproque admis (principe de Lagrange) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J.

Si, pour $x \in J$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur J.

Si, pour $x \in J$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur J.

Si, pour $x \in J$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur J.

De plus, si, pour $x \in J$, $f'(x) > 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur J.

De plus, si, pour $x \in J$, $f'(x) < 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur J.

Notion d'extremum local :
Définition : Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.
On dit que f(a) est un minimum local (respectivement un maximum local) de la fonction f sur I, lorsque f(a) est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans I et contenant a.
f admet un extremum local si elle admet un minimum ou un maximum local.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a et est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$

Attention la réciproque est fausse ! Exemple : $f(x)=x^3$ pour a = 0

Théorème réciproque :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

Exemple $f(x)=x^2$ en a=0

3. Calcul de dérivées.

3.1. Dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Domaine de définition de f	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivation
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Preuve : Le principe pour démontrer cela est d'utiliser le taux de variation en a de f et de regarder la limite quand h tend vers 0.

3.2. Opération sur les dérivées

3.2.1. Dérivée d'une somme

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors la somme de ces deux fonctions est dérivable sur J et :
On a $(u+v)' = u' + v'$

Démonstration : On note f=u+v
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u(a+h)-v(a+h)-(u(a)+v(a))}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or comme u est dérivable, $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

Donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$ et donc f est dérivable en a et $f'(a)=u'(a)+v'(a)$

<u>Exemple</u> $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$

3.2.2. Dérivée d'une multiplication par un scalaire

<u>Propriété :</u> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J et k un réel, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur J et :
On a (ku)' = ku'

<u>Démonstration :</u> On note f=ku

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or comme u est dérivable, $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$

Donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=k\,u'(a)$ et donc f est dérivable en a et $f'(a)=k\,u'(a)$

<u>Exemples :</u> $f(x)=\frac{5}{x^3}$; $g(x)=3x^3-2x^2+7x+1$

3.2.3. Dérivée d'un produit

<u>Propriété :</u> Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors le produit de ces deux fonctions est dérivable sur J et :
On a (uv)' = u'v + v'u

<u>Démonstration :</u>
On note f=uv

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{u(a+h)v(a+h)-(u(a)v(a))}{h}\\&=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}\\&=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

Or comme u et v sont dérivables, $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$ et $\lim_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$

Donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$ et donc f est dérivable en a et $f'(a)=u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$

3.2.4. Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient

<u>Propriété :</u> Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, avec v ne s'annulant pas sur J, de fonctions dérivées u' et v'.

Alors l'inverse de la fonction v est dérivable et : $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{1}{v^2}$

Le quotient de u par v est dérivable, et : $\left(\frac{u}{v}\right)'=-\frac{u'v-v'u}{v^2}$

<u>Démonstration :</u>

On note $f=\frac{u}{v}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a+h)}{v(a)v(a+h)}}{h}$$

$$=\frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)+u(a)v(a)-u(a)v(a+h)}{h(v(a)v(a+h))}$$

$$=\frac{(u(a+h)-u(a))v(a)+u(a)(v(a)-v(a+h))}{h(v(a)v(a+h))}$$

$$=\frac{(u(a+h)-u(a))}{h}\frac{v(a)}{(v(a)v(a+h))}-\frac{u(a)}{(v(a)v(a+h))}\frac{(-v(a)+v(a+h))}{h}$$

Or comme u et v sont dérivables, $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$ et $\lim_{h\to 0} v(a+h)=v(a)$

Donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{(v(a))^2}$ et donc f est dérivable en a et $f'(a)=\frac{u'(a)v(a)-v'(a)u(a)}{(v(a))^2}$

Exemple : Calculer la dérivée de f: x $\longmapsto \frac{x^2+3x+1}{4x+1}$

f'(x)= $\frac{(2x+3)(4x+1)-4(x^2+3x+1)}{(4x+1)^2}=\frac{(8x^2+2x+12x+3)-4x^2-12x-4}{(4x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-1}{(4x+1)^2}$

3.2.5. Dérivée de la composée d'une fonction par une fonction affine

Propriété (admise) : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J, de fonctions dérivées u'. Soient a et b deux réels. Soit I l'intervalle tel que pour $x \in I$, $ax+b \in J$.
Alors $v : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur I et : $v'(x) = au'(ax+b)$