Autour des angles orientés

A chaque fois que cela est nécessaire, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Angles orientés.

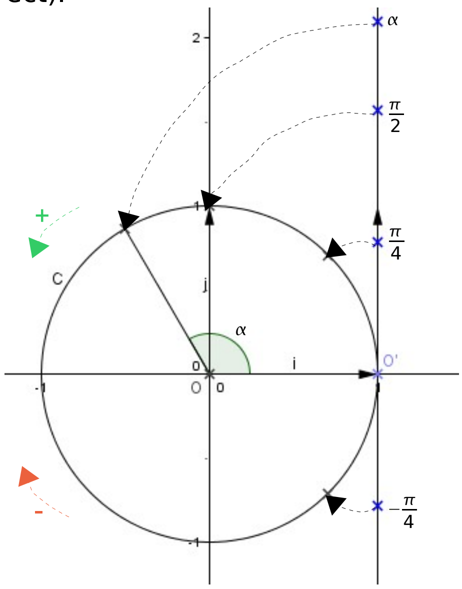
1.1. Cercle trigonométrique

Définition : Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle : soit le sens positif (ou direct ou anti-horaire) soit le sens négatif (ou indirect).

Le cercle de centre O, de rayon 1, parcouru dans le sens direct est appelé <u>cercle trigonométrique</u> (C).

Soit O'(1;0). Ce point est sur le cercle et est pris comme origine sur ce cercle.

On considère la droite d, d'équation x=1, que l'on muni d'un repère . $\left(O', \vec{j}\right)$ A tout nombre réel α, on peut associer un unique point N sur d, et α représente l'abscisse de N et réciproquement.



<u>Définition :</u> L'<u>abscisse curviligne</u> d'un point M du cercle trigonométrique correspond à l'abscisse de tout point N_k de la droite d venant se superposer à M par enroulement de la droite autour du cercle.

<u>Propriété :</u> Si α est une abscisse curviligne du point M, alors tout nombre du type $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est donc une abscisse curviligne de M.

<u>Définition :</u> Soit A et B deux points du cercle trigonométrique.
On appelle arc orienté AB l'arc formé en parcourant le cercle de A vers B (soit dans un sens, soit dans l'autre)

<u>Propriété :</u> Si α (respectivement β) est une abscisse curviligne du point A (respectivement B), alors une des mesures de l'arc orienté AB est $\beta - \alpha$. De manière générale, une mesure de l'arc orienté AB est $\beta - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1.2. Angles orientés

<u>Définition :</u> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle angle orienté le couple formé par ces deux angles et noté $(\vec{u}, \vec{v})$

Soit A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Soit A' (respectivement B') le point de [OA) (respectivement [OB)) rencontrant (C).

Alors à l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est associé l'unique arc orienté A'B'.

<u>Définition :</u> Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ en radian, est une mesure de l'arc orienté associé A'B' du cercle trigonométrique.

Si α est une mesure de l'angle orienté , alors toutes les mesures de cet angle orienté sont du type $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note : $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$.

<u>Définition :</u> La mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ en radian, est l'unique mesure de cet angle dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

© Xavier OUVRARD BRUNET 2009

Définition : Deux angles orientés sont dits égaux si leurs mesures principales sont égales (ou ce qui revient au même si l'une de leur mesure est égale à celle de la mesure de l'autre)
Deux angles orientés sont dits opposés si leurs mesures principales sont opposées (ou ce qui revient au même si l'une de leur mesure est égale à l'opposée de la mesure de l'autre)

Remarque : 1. L'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est plus associé à une région de plan contrairement à un angle géométrique.

2. La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ est 0, aussi cet angle orienté est appelé l'angle nul.

La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$ est π, aussi cet angle orienté est appelé l'angle plat.

Relation de Chasles :
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + 2k\pi$

Preuve : On revient aux abscisses curvilignes. Pour cela :
Soit A, B et C trois points du cercles trigonométriques, d'abscisses curvilignes respectives α, β, γ tels que :

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + 2k\pi$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) + 2k\pi$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + 2k\pi$

Alors :

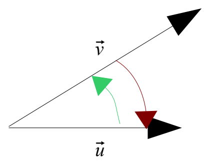
$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \beta - \alpha + 2k_1\pi$, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \gamma - \beta + 2k_2\pi$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \gamma - \alpha + 2k_3\pi$

On a :

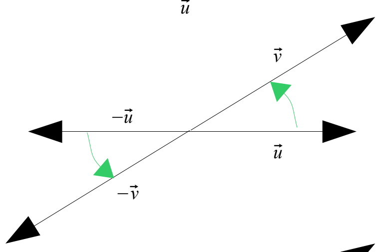
$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \beta - \alpha + 2k_1\pi + \gamma - \beta + 2k_2\pi \\
&= \gamma - \alpha + 2(k_1 + k_2)\pi \\
&= \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + 2k'\pi \\
&= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + 2k\pi
\end{aligned}$$

Conséquences :
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

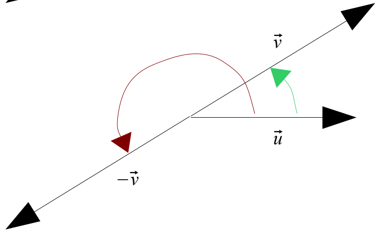
$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 2k\pi$$



$$(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 2k\pi$$



$$(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi$$

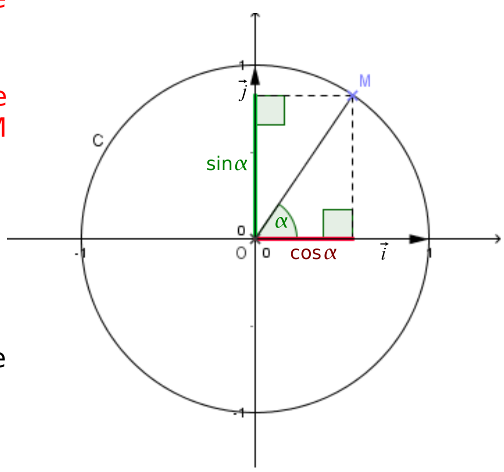


© Xavier OUVRARD BRUNET 2009

Soit a et b deux réels non nuls de même signe, alors :

$$(a\vec{u}, b\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

2. Trigonométrie



Définition : Soit α un réel. Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$.

On appelle cosinus et sinus de l'angle α et l'on note respectivement $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

Remarque :

Pour des valeurs de $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on retrouve le cosinus et le sinus de l'angle géométrique aigu $\widehat{IOM}$.

Propriétés : On a :
Pour tout réel α et tout entier relatif k :

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Valeurs remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés : On a :
Pour tout réel α :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

2.3. Équations en trigonométrie

Équation du type $\cos x = a$.

Si $|a| > 1$, alors cette équation n'admet pas de solution.
Si $|a| < 1$, alors cette équation admet deux solutions dans $]-\pi;\pi]$: $-\alpha$ et α avec $\cos\alpha = a$ et $\alpha > 0$
Si $a = 1$, alors cette équation admet une solution dans $]-\pi;\pi]$: 0.
Si $a = -1$, alors cette équation admet une solution dans $]-\pi;\pi]$: π.

Toutes les solutions de l'équation $\cos x = a$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$

© Xavier OUVRARD BRUNET 2009

Équation du type $\sin x = b$.
Si $|b| > 1$, alors cette équation n'admet pas de solution.
Si $|b| < 1$ alors cette équation admet deux solutions dans $]-\pi;\pi]$: $\pi - \alpha$ et α avec $\sin\alpha = b$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
Si $b = 1$, alors cette équation admet une solution dans $]-\pi;\pi]$: $\frac{\pi}{2}$.
Si $b = -1$, alors cette équation admet une solution dans $]-\pi;\pi]$: $-\frac{\pi}{2}$.

Toutes les solutions de l'équation $\sin x = b$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.

Propriétés :
Soit α et β deux réels.
1. $\cos\alpha = \cos\beta$ ssi $\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = -\beta + 2k\pi$
2. $\sin\alpha = \sin\beta$ ssi $\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$

3. Repérage polaire

3.1. Repérage polaire d'un point du plan

Soit O un point et $\vec{i}$ un vecteur unitaire. Soit $\vec{j}$ un vecteur tel que $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit un repère orthonormé.
Soit M un point du plan distinct de O.
Soit M' le point d'intersection du cercle trigonométrique avec [OM).
On a : $\overrightarrow{OM} = OM\overrightarrow{OM'}$ ou encore en posant $r = OM$, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OM'}$
D'après ce qui précède, il existe θ tel que $\overrightarrow{OM'} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\theta = \left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$
et donc $\overrightarrow{OM} = r\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$
Ainsi le couple $(r;\theta)$, avec $r > 0$, définit parfaitement la position du point M dans le plan.
Ce couple est appelé couple de coordonnées polaires dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$

O est appelé le pôle, la demi-droite d'origine O, dirigée par $\vec{i}$, l'axe polaire.
r est appelé le rayon polaire et θ un angle polaire.

Remarques :
1. Si $(r;\theta)$ est un couple de coordonnées polaires d'un point M, alors tout couple $(r;\theta + 2k\pi)$ est un autre couple de coordonnées polaires de M.
2. Pour l'origine O, on convient que $r = 0$ et que n'importe quelle valeur de θ convient.
3. Pour un repère polaire donné, à chaque couple de coordonnées polaires correspond un seul point.

3.2. Lien entre les coordonnées polaires et cartésiennes

Avec les notations de 3.1., soit $(x;y)$ les coordonnées cartésiennes de M, distinct de O, dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On a : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$, d'où : $\overrightarrow{OM} = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}\right)$

© Xavier OUVRARD BRUNET 2009

En posant $r=\sqrt{x^2+y^2}$, et θ l'angle défini à 2π près tel que : $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, alors on a : $\overrightarrow{OM}=r\left(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\right)$.

<u>Propriété :</u> Soit $M(r,\theta)$ un point distinct de O dans un repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$. Soit $\vec{j}$ un vecteur tel que $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ soit un repère orthonormé. Soit $(x;y)$ les coordonnées cartésiennes de M, distinct de O, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Alors $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

3.3. Calculs trigonométriques

Formules d'addition :

<u>Propriété :</u> Soit a et b deux réels.
Alors :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

Preuve :

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)=a+b$, N celui tel que : $\left(\vec{i};\overrightarrow{ON}\right)=a$. Soit N' le point du cercle trigonométrique, tel que $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{ON'}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{OM}=\cos(a+b)\,\vec{i}+\sin(a+b)\,\vec{j}$ (1)

$\overrightarrow{OM}=\cos b\,\overrightarrow{ON}+\sin b\,\overrightarrow{ON'}$

Or $\overrightarrow{ON}=\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON'}=\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$$=-\sin a\,\vec{i}+\cos a\,\vec{j}$$

d'où :

$$\overrightarrow{OM}=\cos b\left(\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j}\right)+\sin b\left(-\sin a\,\vec{i}+\cos a\,\vec{j}\right)$$
$$=(\cos a\cos b-\sin b\sin a)\,\vec{i}+(\cos a\sin b+\ sina\cos b)\,\vec{j}\ (2)$$

et donc comme les coordonnées cartésiennes d'un vecteur sont uniques de (1) et (2), on déduit :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

<u>Propriété :</u> Soit a un réel.
Alors :

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

Preuve : immédiate

© Xavier OUVRARD BRUNET 2009