Polynômes. Trinôme

1. Polynômes.

Définition : Un monôme en la variable x est une expression de la forme *ax* ^{n}, où a est un nombre réel, n un entier naturel. n est appelé le degré du monôme. a est appelé le coefficient du monôme.

Définition : Une fonction polynôme P en la variable x est une fonction composée d'une somme de monôme en la variable x.
Ainsi, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que, pour tout réel x :

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

Par abus de langage, on parle souvent du polynôme P.

Théorème Définition :
Toute fonction polynôme, différente de la fonction polynôme nulle, peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Les réels $a_0, a_1, ..., a_n$ sont appelés les coefficients de la fonction polynôme et n son degré.
Les termes « $a_i x^i$ »sont appelés les termes de degré i du polynôme.

Exemple : Un polynôme du second degré est un polynôme de degré 2. Il existe donc a, b et c, tel que ce polynôme s'écrive ax²+bx+c. Un tel polynôme est aussi appelé trinôme du second degré.

Propriété(admise)
Deux polynômes non nuls sont égaux ssi ces polynômes sont de même degré et ont les coefficients des termes de même degré deux à deux égaux.

Définition : On appelle racine (ou zéro) d'un polynôme P, tout α tel que $P(\alpha) = 0$.
Autrement dit une racine de P correspond à une solution de l'équation : $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Application à la factorisation de polynômes et à la recherche de racines :
On cherche à factoriser un polynôme de sorte à pouvoir trouver ses racines. On identifie alors les coefficients de chacun des termes de même degré des deux polynômes trouvés et on obtient un système que l'on résout.
On procède étape par étape.
Exemple : Résoudre : $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = 0$
1 est solution évidente de cette équation. Il existe donc trois réels a, b et c tels que :
$2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
et par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 9 \\ c - b = 4 \\ -c = -15 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a = 2 \\ b = 11 \\ c = 15 \end{cases}$$

D'où : $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = (x-1)(2x^2 + 11x + 15)$
-3 est solution évidente de $2x^2 + 11x + 15 = 0$.
D'où : $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = (x-1)(x+3)(2x+5)$ et donc $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = 0$ a pour solution 1, -3 et $-\frac{5}{2}$.
Problème : Que ce serait-il passé si il n'y avait pas eu de solution évidente, en particulier au niveau du trinôme ?

2. Trinôme du second degré.

On se limite désormais pour la suite à des trinômes du second degré.
Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme (avec a non nul).

2.1. Forme canonique d'un trinôme

$$
\begin{aligned}
P(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)
\end{aligned}
$$

Définition : On appelle discriminant de $P(x)=ax^2+bx+c$, le nombre : $\Delta=b^2-4ac$.

Ainsi : $P(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$

Propriété : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme (avec a non nul).
Alors, il existe deux réels α et β tels que : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. De plus, $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=P(\alpha)$.
Cette forme est appelée la forme canonique de P.

2.2. Factorisation du trinôme

On vient de voir qu'un trinôme du second degré peut se mettre sous la forme :

$$P(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Si $\Delta>0$, alors
$$
\begin{aligned}
P(x) &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

Si $\Delta=0$, alors $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Si $\Delta<0$, alors P ne peut pas se factoriser.

2.3. Résolution d'une équation du second degré

On cherche maintenant à résoudre l'équation : $P(x) = 0$

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme (avec a non nul).

On considère l'équation : $P(x) = 0$.

Si $\Delta > 0$, alors cette équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, alors admet une seule solution (double)$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, alors cette équation n'admet pas de solution.

Exemple : Résoudre $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 49 + 32 = 81$$

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-7-\sqrt{81}}{2 \times 2} = -4.$$

$$S = \left\{-4; \frac{1}{2}\right\}$$

Résoudre $3x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 4 = 25 - 48 = -23 < 0$, et donc $S = \emptyset$

2.4. Résolution d'une inéquation du second degré

On appelle inéquation du second degré toute inéquation comportant une inconnue de degré maximal deux, ou pouvant s'y ramener.
On admettra que toute équation du second degré peut se ramener à l'étude du signe d'un trinôme.

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme (avec a non nul), de discriminant Δ.

Si $\Delta \leqslant 0$, alors P a le signe de a.

Si $\Delta > 0$, alors P a le signe de a à l'extérieur des racines (ie $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$) et celui de -a à l'intérieur des racines (ie $x \in]x_1; x_2[$).

Preuve :

Si $\Delta \leqslant 0$, c'est immédiat, il suffit de prendre : $P(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ lorsque $\Delta < 0$

et $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ lorsque $\Delta = 0$.

Si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $x - x_1$		-	0	+		+	
Signe de $x - x_2$		-		-	0	+	
Signe de $(x - x_1)(x - x_2)$		+		-		+	
Signe de $P(x)$		+	0	$-$	0	+	

2.5. Fonction trinôme

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme (avec a non nul). On a vu, dans le paragraphe 2.1., que P peut également s'écrire : $x \longmapsto P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
Par suite :

<u>Propriété :</u> La fonction $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ a pour courbe représentative une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, qui est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$, par la translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, orientée dans le sens des y positifs, si a est positif et dans le sens des y négatifs si a est négatif.

En effet, le sens de variation de P est celui de $x \longmapsto x^2$ si $a > 0$ et inverse de celui de $x \longmapsto x^2$ si $a < 0$.

En pratique, on a les tableaux de variation suivants :

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

<u>Remarque :</u> En fonction du signe du discriminant, la parabole coupera 0, 1 ou 2 fois l'axe des abscisses.

Faire des graphiques pour les six cas

<u>Exemple :</u> On considère : $P : x \longmapsto 3x^2 - 12x + 13$. On a : $P : x \longmapsto 3(x - 2)^2 + 1$