Géométrie dans l'espace

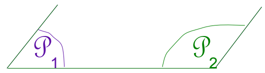
1. Rappels de géométrie dans l'espace

1.1. Positions relatives de droites et plans

1.1.1. Position relative de deux plans

Définition : On dit que deux plans sont strictement parallèles s'ils n'ont aucun point d'intersection.

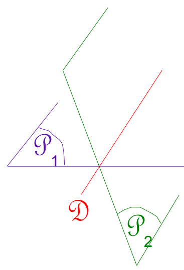
Deux plans qui ont une infinité de points communs sont dits confondus.



On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont strictement parallèles ou confondus.

Notation : Soit ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) deux plans parallèles. On note ($\mathcal{P}_1$)//($\mathcal{P}_2$).

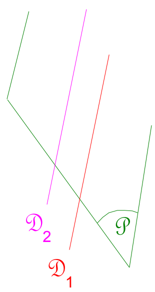
Définition : Deux plans qui ne sont pas parallèles sont dits sécants. Dans ce cas, l'intersection est une droite.



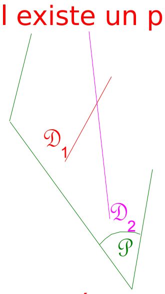
Notation : Soit ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) deux plans parallèles. On note $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 .= \mathcal{D}$

1.1.2. Position relative de deux droites

Définition : On dit que deux droites sont parallèles s'il existe un plan dans lequel elles sont parallèles.



On dit que deux droites sont sécantes si il existe un plan où elles sont sécantes.



Des droites de l'espace qui sont parallèles ou sécantes sont dites coplanaires.

Notation : On conserve la notation habituelle pour le parallélisme de droites, à savoir //.

Remarques : Seules des droites sécantes ont un seul point d'intersection. A noter que les droites strictement parallèles ne sont plus les seules à n'avoir aucun point d'intersection : c'est aussi le cas des droites non coplanaires.

1.1.3. Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ peuvent:

- soit être sécants : il y a alors un seul point d'intersection.
- soit avoir une infinité de points communs : la droite est incluse dans le plan
- soit n'avoir aucun point commun : la droite est alors parallèle au plan. En particulier, il existe une droite du plan telle que cette droite soit parallèle à la droite de départ.

1.2. Parallélisme dans l'espace

Propriété : Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre et toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Théorème du « toit » :
Soit deux droites parallèles, soit deux plans contenant ces droites se coupant en une troisième droite. Alors cette droite est parallèle aux deux premières.

Propriété :
On considère deux plans ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$), et deux droites ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}'_1$) incluses dans ($\mathcal{P}$1) et ($\mathcal{D}_2$) et (D'$_2$) incluses dans ($\mathcal{P}_2$) telles que : $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_1 // \mathcal{D}'_2$. Alors : $\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$.

Propriété :
On considère deux plans ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) parallèles. Alors tout plan ($\mathcal{P}$) coupant l'un coupe l'autre.
En notant $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}_1) = (d_1)$ et $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}_2) = (d_2)$ alors $(d_1) // (d_2)$.

1.3. Orthogonalité dans l'espace

Définition : On dit que deux droites de l'espace sont perpendiculaires si elles sont coplanaires et sécantes en formant un angle droit.

Définition : On dit que deux droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales si il existe une droite (d) parallèle à (d_1) et qui soit perpendiculaire à (d_2) .

Propriétés : Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
Si deux droites sont parallèles, alors toute orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété : Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors cette droite est perpendiculaire au plan.

Conséquence : Une droite qui est perpendiculaire à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Propriété : Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, leur intersection est perpendiculaire à ce plan.

1.4. Plan médiateur

Définition : On appelle plan médiateur d'un segment le plan passant par le milieu du segment et perpendiculaire à la droite support de ce segment.

Propriété : Tout point situé sur le plan médiateur d'un segment est équidistant des sommets de ce segment.
Réciproquement, si un point de l'espace est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur le plan médiateur de ce segment.
Preuve : Soit [AB] un segment et I son milieu. Soit (P) le plan médiateur de [AB]. Soit M appartenant à P. Alors (MI) est perpendiculaire à [AB] puisque (AB) est perpendiculaire à (P) et donc à toute droite de P, en particulier (MI). Dans le plan (MAB), (MI) est la médiatrice de [AB] et donc M est équidistant de A et de B.
Réciproquement soit M équidistant de A et de B. On considère le plan (Q), passant par M et perpendiculaire à (AB). Ce plan coupe (AB) en K. (MK) est perpendiculaire à (AB) et MA=MB, donc dans le plan (ABM), (MK) est la médiatrice de [AB] et donc K est le milieu de [AB]. Par suite, (Q) est le plan médiateur de [AB].

2. Sections planes d'un solide

2.1. Généralités

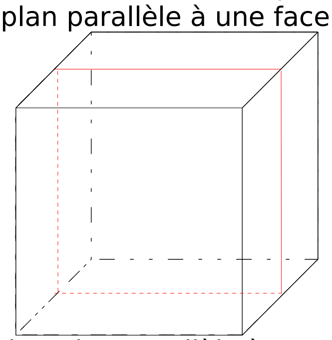
Définition : La section d'un solide par un plan correspond à la « trace » laissée par ce plan sur le solide, qui est formée par l'ensemble des points communs au solide et au plan.

Exemples :
Pyramide régulière, cône, cube, sphère

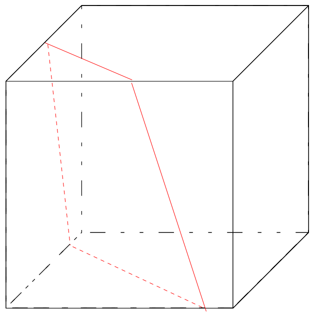
2.2. Section d'un cube par un plan

Propriété : La section d'un cube par un plan peut-être :

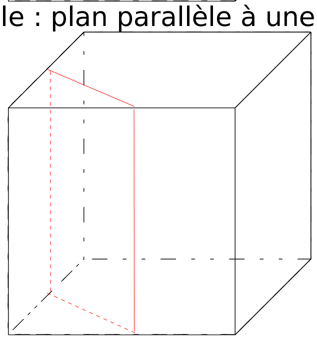
- un carré : plan parallèle à une face



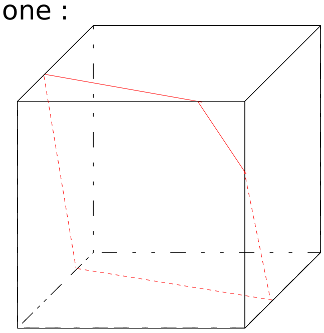
- un trapèze :



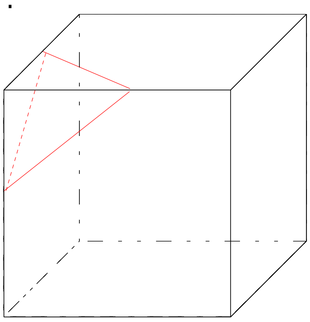
- un rectangle : plan parallèle à une arête



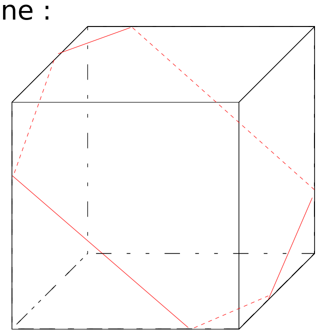
- un pentagone :



- un triangle :



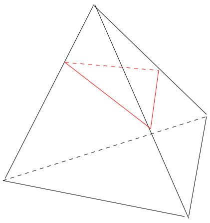
- un hexagone :



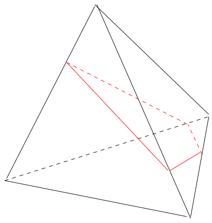
2.3. Section d'un tétraèdre par un plan

Propriété : La section d'un tétraèdre par un plan peut-être :

- un triangle :



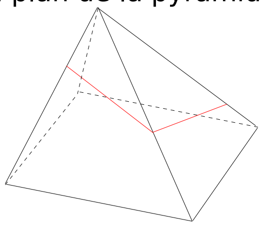
- un quadrilatère :



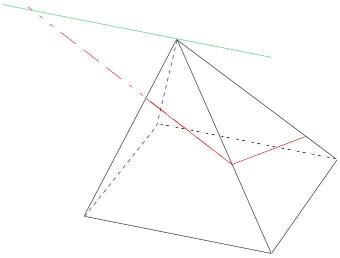
2.4. Savoir construire la section plane d'un solide

Méthode : La construction de la section d'un polyèdre par un plan se fait en construisant l'intersection de ce plan avec les différentes faces du solide.
On peut alors se rappeler :
1. qu'en connaissant deux points distincts appartenant tous les deux à deux plans distincts, on connaît alors l'intersection de ce plan.
2. que la section d'un plan coupé par deux plans parallèles sont deux droites parallèles.
3. du théorème du toit.
4. que l'on peut « sortir » du solide.

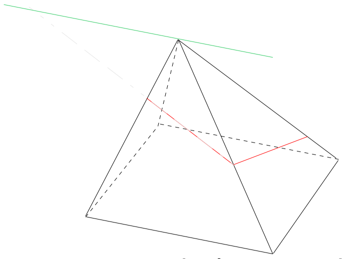
Exemple : Compléter la section par un plan de la pyramide à base rectangulaire suivante :



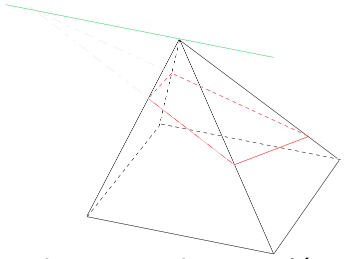
Solution : Deux arrêtes opposés de la base sont parallèles. Donc en utilisant le théorème du toit et en sortant du solide on obtient :



On trace la droite verte, intersection du plan de face et du plan arrière ; en utilisant le théorème du toit, cette droite est parallèle aux deux arrêtes avant et arrière de la base.



En « sortant » de la pyramide on trouve un deuxième point d'intersection avec la face arrière de la pyramide.



Ce qui permet de compléter la section.

3. Géométrie vectorielle

3.1. Définition

Définition : On appelle vecteur de l'espace, la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur.

Notation : Soient A et B deux points de l'espace, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur ayant pour direction la droite (AB), le sens de A à B et de longueur AB.

Définition : On note $\|\vec{u}\|$ la longueur d'un vecteur et on l'appelle norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition : Deux vecteurs sont dits égaux si ils ont même direction, même sens et même longueur.

Conséquences : 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe une infinité de représentants de $\vec{u}$.
2. On appelle vecteur nul, et on note $\vec{0}$, tout vecteur ayant pour longueur 0.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le vecteur ayant même direction et même longueur que $\vec{u}$ et de sens opposé est noté $-\vec{u}$.

Traduction de l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme ou encore que [AD] et [BC] ont le même milieu ou encore que D est l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Vecteurs coplanaires :
Définition : On dit que des vecteurs sont coplanaires si l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs dont les extrémités appartiennent à un même plan.

Propriété : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

3.2. Opérations sur les vecteurs

3.2.1. Somme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Comme deux vecteurs sont toujours coplanaires, on peut revenir à la somme de deux représentants de ces vecteurs dans un plan.

Par suite, on étend la relation de Chasles (mathématicien français (1793 – 1880)) à l'espace :
Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points. On a :
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Conséquences :
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité de l'addition de vecteurs)
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (commutativité de l'addition de vecteurs)
$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ ($\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition de vecteurs)
$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ ($-\vec{u}$ est l'opposé de $\vec{u}$ dans l'addition de vecteurs)

Preuve :
Faire des figures

Règle du parallélogramme :

Soit A, B et C trois points. Soit M un quatrième point.
ABMC est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.

3.2.2. Multiplication par un scalaire

Définition : Soit α un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
Si $\vec{u}\neq 0$, alors $\alpha\vec{u}$ est le vecteur :
- qui a la même direction que $\vec{u}$;
- qui, si $\alpha>0$, a le même sens que $\vec{u}$ et sinon un sens opposé ;
- $\|\alpha\vec{u}\|=|\alpha|\|\vec{u}\|$

Pour tout réel α et tout vecteur $\vec{u}$, on pose : $0\vec{u}=\vec{0}$ et $\alpha\vec{0}=\vec{0}$.

Propriétés :
Soit α, β deux réels. Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs. On a :
$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
$\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
$\alpha\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Preuve :
Similaire au plan

3.3. Applications

3.3.1. Droites de l'espace

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires si ils ont la même direction. Autrement dit il existe α non nul tel que $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.

Définition : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite de l'espace, notée d(A, $\vec{u}$), passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

3.3.2. Vecteurs coplanaires

Propriété (admise) : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels α, β et γ tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$.

De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels a et b tels que : $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

4. Avec des coordonnées

4.1. Repérage dans l'espace

Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace. Le quadruplet $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ constitue un repère de l'espace.

On note : I le point tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, J le point tel que $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et K le point tel que $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux alors on dit que $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthogonal.

Si de plus les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont même longueur égale à 1 alors $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormal.

Propriété-Définition : Soit M un point de l'espace, muni d'un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Alors il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tels que : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la côte de M.

4.2. Coordonnées d'un vecteur. Distance entre deux points

Propriétés : Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$.

Les coordonnées du milieu de [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Preuve : Identiques au plan

Propriété : Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit λ un réel.

Alors : $\vec{u}+\vec{v}(x+x', y+y', z+z')$ et $\lambda\vec{u}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Propriété : Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

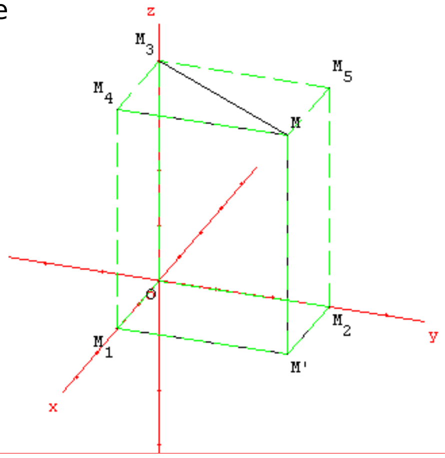
Démonstration : On note M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
M a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
On a grâce au théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OM'^2 + OM_3^2$$

$$OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2$$

$$OM^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

et donc le résultat.



Conséquence : Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de l'espace muni d'un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.3. Équations de quelques objets de l'espace

On muni l'espace d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

4.3.1. Plans parallèles aux plans de coordonnées

Propriété : Pour un plan parallèle au plan xOy, passant par le point de coordonnées (0,0,c), a pour équation : z=c.
Pour un plan parallèle au plan xOz, passant par le point de coordonnées (0,b,0), a pour équation : y=b.
Pour un plan parallèle au plan yOz, passant par le point de coordonnées (a,0,0), a pour équation : x=a.

4.3.2. Sphère centrée à l'origine

Propriété : Une sphère de centre l'origine du repère et de rayon R a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Démonstration : Soit $M(x, y, z) \in S$. On a : OM=R ssi $OM^2 = R^2$ ssi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

4.3.3. Cylindre ayant pour axe un axe du repère

Propriété : Un cylindre de révolution de rayon R et d'axe Ox a pour équation : $y^2 + z^2 = R^2$.
Un cylindre de révolution de rayon R et d'axe Oy a pour équation : $x^2 + z^2 = R^2$.
Un cylindre de révolution de rayon R et d'axe Oz a pour équation : $x^2 + y^2 = R^2$.

Preuve : Soit $M(x, y, z)$. Soit P le projeté orthogonal de M sur Oz. Comme $\overrightarrow{OP} = z\vec{k}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$
On a : $M(x, y, z) \in C$ ssi PM=R ssi $PM^2 = R^2$ ssi $x^2 + y^2 = R^2$.

4.3.4. Cône de sommet l'origine ayant pour axe un axe du repère

Propriété : Un cône de révolution de sommet O, d'axe Ox a pour équation cartésienne : $y^2 + z^2 = \lambda x^2$, où λ est un réel strictement positif.
Un cône de révolution de sommet O, d'axe Oy a pour équation cartésienne : $x^2 + z^2 = \mu y^2$, où μ est un réel strictement positif.

Un cône de révolution de sommet O, d'axe Oz a pour équation cartésienne : $x^2+y^2=\nu z^2$, où ν est un réel strictement positif.

<u>Preuve :</u> On considère un cône de révolution de sommet O, d'axe Oz, . La génératrice du cône fait un angle α en O avec Oz.
Soit $M(x,y,z)$ un point distinct de O. Soit P le projeté orthogonal de M sur Oz. Comme $\overrightarrow{OP}=z\,\overrightarrow{k}$,$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}$
On a : $M(x,y,z)\in C$ ssi $\widehat{MOP}=\alpha$ ssi $\tan\widehat{MOP}=\tan\alpha$.
Or, dans le triangle MOP rectangle en P, on a : $\tan\widehat{MOP}=\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}$
D'où : $M(x,y,z)\in C$ ssi $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}=\tan\alpha$ ssi $\sqrt{x^2+y^2}=|z|\tan\alpha$
ssi $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$
En posant $\nu=\tan^2\alpha$, on a : $M(x,y,z)\in C$ ssi $x^2+y^2=\nu z^2$
Si M est en O, alors cette équivalence reste vraie.