Généralités sur les fonctions numériques

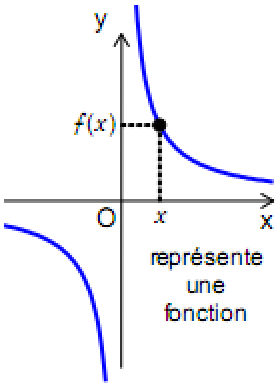
1. Rappels sur les fonctions

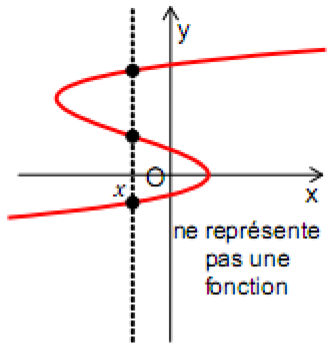
1.1. Généralités

Définition : On appelle fonction f un procédé qui à tout nombre réel x tente d'associer un unique nombre réel $f(x)$, appelé image de x par f. On note $f: x \longmapsto f(x)$.
L'ensemble sur lequel il est possible de prendre les valeurs de x est appelé ensemble de définition de la fonction et est généralement noté D_f.
On appelle antécédent de y par f toute valeur x de D_f telle que $f(x)=y$.
En munissant le plan d'un repère, les points de coordonnées $(x;f(x))$ définissent ce qui est appelée la courbe représentative de f.

Exemples :
Définition explicite, graphique.

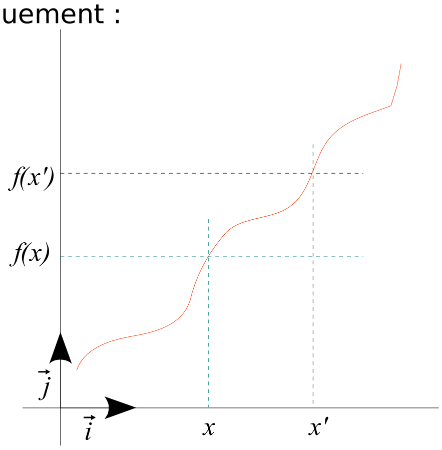
Remarques : 1. au lycée, généralement le domaine de définition est un intervalle ou une réunion d'intervalles.
2. On travaille parfois sur une restriction du domaine de définition, généralement un intervalle.
3. Un nombre ne peut avoir au maximum qu'une seule image par f, par contre il peut avoir plusieurs antécédents par f.
Ainsi:



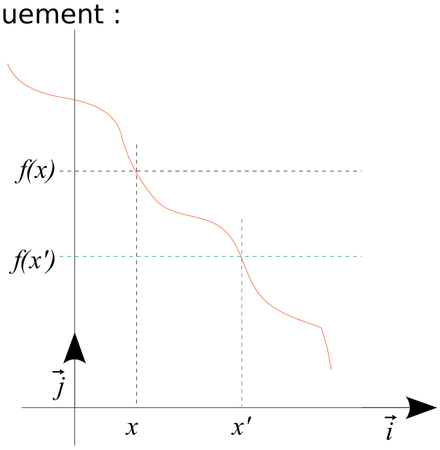


On considère maintenant f une fonction de domaine de définition D_f.

Définition : Soit I un intervalle inclus dans D_f.
f est dite croissante sur I si pour $x \in$I et $x' \in$I tel que $x<x'$, on a $f(x) \leqslant f(x')$.
f est dite strictement croissante sur I si pour $x \in$I et $x' \in$I tel que $x<x'$, on a $f(x)<f(x')$.
Graphiquement :

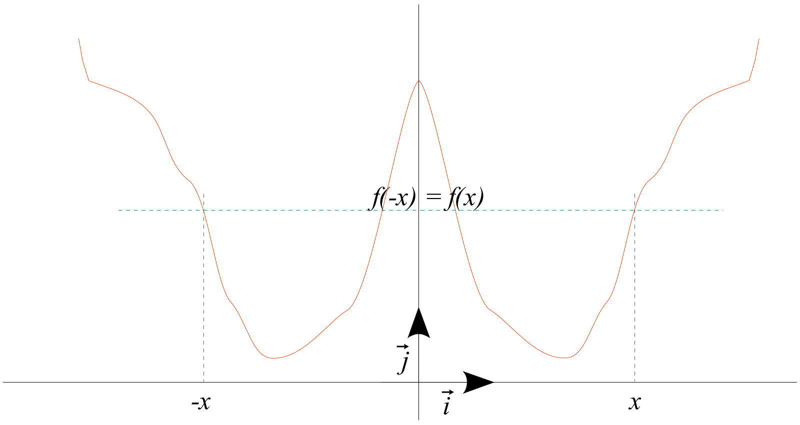


f est dite décroissante sur I si pour $x \in$I et $x' \in$I tel que $x<x'$, on a $f(x) \geqslant f(x')$.
f est dite strictement croissante sur I si pour $x \in$I et $x' \in$I tel que $x<x'$, on a $f(x)> f(x')$.
Graphiquement :

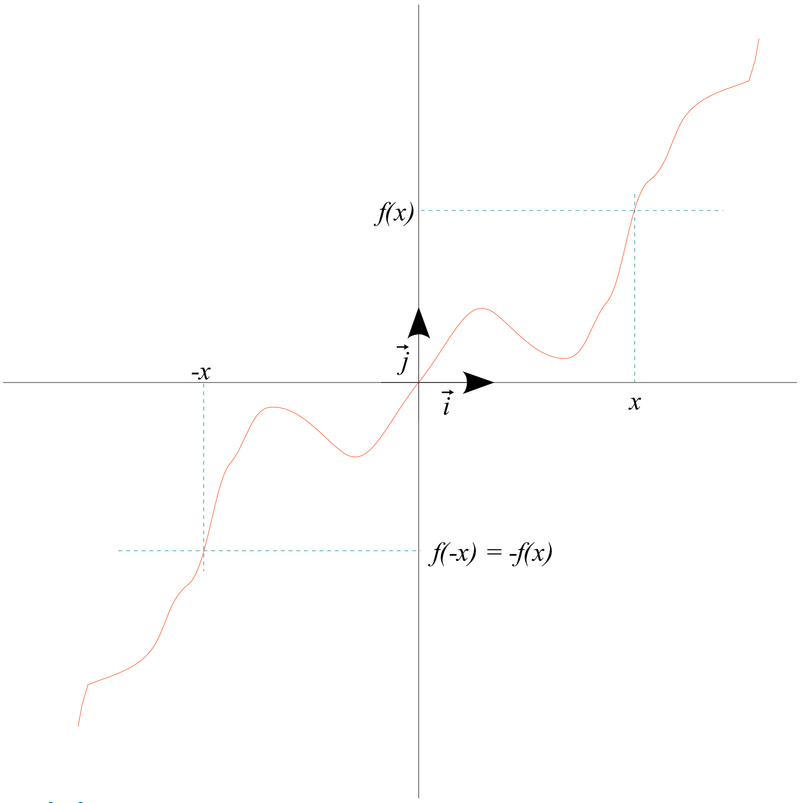


Définition : Soit f une fonction, de domaine de définition D_f.
Une fonction est dite paire si l'on a : $f(-x)=f(x)$ et si pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$.
Une fonction est dite impaire si l'on a : $f(-x)=-f(x)$ et si pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$.

Propriété : Une fonction paire a sa représentation graphique symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Une fonction impaire a sa représentation graphique symétrique par rapport au centre du repère.



1.2. Fonctions de référence.

1.2.1. Fonctions affines.

Définition-Propriété : Soit a et b deux réels. La fonction $x \longmapsto ax+b$, définie sur $\mathbb{R}$ est appelé une fonction affine. La représentation graphique d'une telle fonction est une droite d d'équation y=ax+b.
a est appelé le taux d'accroissement de f (ou le coefficient directeur ou encore la pente de d).

Propriété : Le sens de variation de f dépend du signe de a :
Si a>0, alors f est croissante.
Si a=0, alors f est constante.
Si a<0, alors f est décroissante.

Caractérisation d'une fonction affine :
Soit f une fonction, x et x' deux réels. f est affine ssi pour tout réels x et x' ($x \neq x'$), le taux de variation $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ est un nombre qui est indépendant de x et de x'.

Démonstration :
Si f est affine, alors il existe a et b tels que f(x)=ax+b. Donc ... et le taux de variation est constant et vaut a. Réciproquement si le taux de variation est constant, ...
Contre-exemple :
On considère :

x	1	2	4
$f(x)$	0	1	2

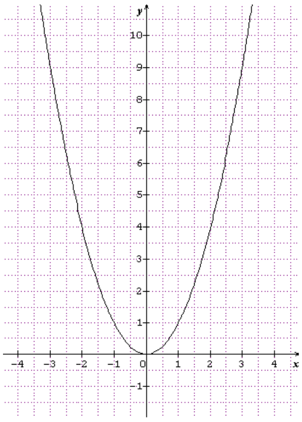
Donc *f* n'est pas affine. Faire un dessin

Recherche d'une fonction affine :
Il faut connaître deux nombres et leurs images

1.2.2. La fonction carré.

Définition-Propriété : La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue, décroissante sur $\mathbb{R}^-$, croissante sur $\mathbb{R}^+$ et dont la représentation graphique est appelée parabole.

Propriété : Comme $(-x)^2=x^2$, la fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction paire et l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la parabole.

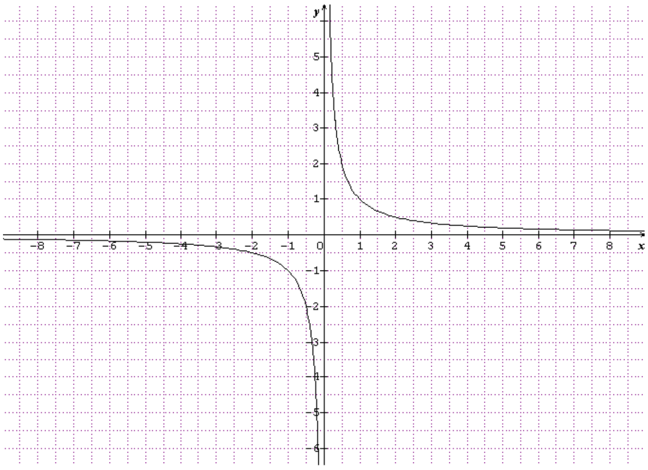


Application à la résolution d'équations du type x² = a
Propriété : $x^2=a$ admet 2 solutions si a est strictement positif, 1 seule si a=0 et aucune si a<0.
Graphiquement, on peut tracer la parabole correspondant à $x \longmapsto x^2$, puis tracer la droite d'équation y=a. Le nombre de points d'intersection de la parabole avec la droite donne le nombre de solutions...

1.2.3. La fonction inverse.

Définition : La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, continue, décroissante et négative sur $]-\infty;0[$, continue, décroissante et positive sur $]0;+\infty[$,et dont la représentation graphique est appelée hyperbole.

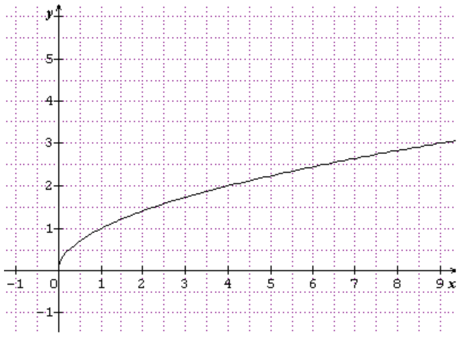
Propriété : Comme $\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire et l'origine du repère est centre de symétrie pour l'hyperbole.



1.2.4. La fonction racine carrée

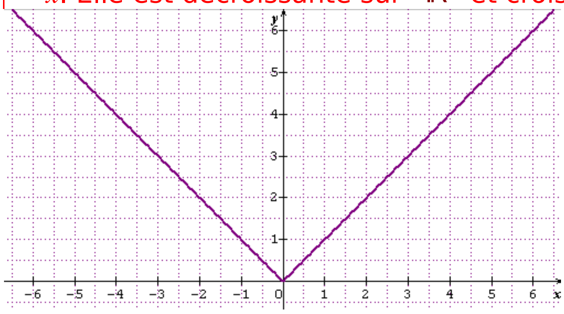
Définition : La fonction carré $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, croissante et positive sur $]0\,;+\infty[$, et dont la représentation graphique est une demi-parabole, de sommet 0.

Rappel : L'écriture $\sqrt{x}$ quand elle a un sens donne trois informations : $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.



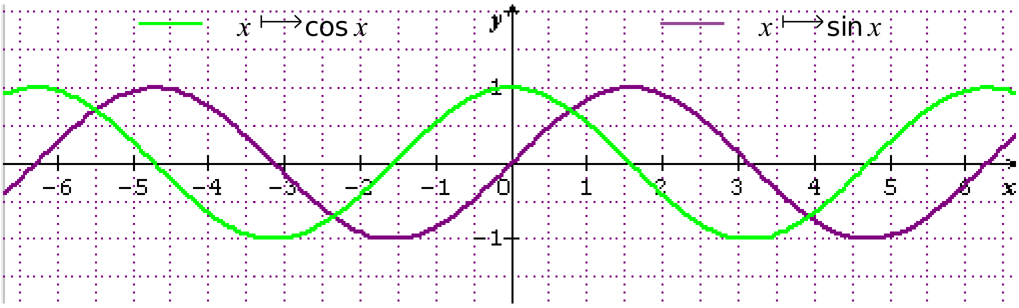
1.2.5. La fonction valeur absolue

Définition : La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour $x<0$, $|x|$ = $-x$ et pour $x \geqslant 0$, $|x| = x$. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



1.2.6. Les fonctions trigonométriques

Définition : Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π et elles ont pour représentation graphique une courbe appelée sinusoïde.



2. Opérations sur les fonctions

2.1. Égalité de deux fonctions

Définition : Deux fonctions f et g de domaine de définitions respectifs D_f et D_g sont dites égales si : $D_f = D_g$ et si pour tout $x \in D_f$, $f(x)=g(x)$.

Exemple : Les fonctions définies par $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$ et $g(x)=x+4+\dfrac{11}{x-2}$ sont égales : en effet, elles ont même domaine de définition ($\mathbb{R}\backslash\{2\}$) et $f(x)=g(x)$ pour tout x de ce domaine de définition.

2.2. Somme et différence de fonctions

Exemple d'introduction 1 :

On considère les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto x^2+3$.

On note s : $x \longmapsto f(x)+g(x)$ et d : $x \longmapsto f(x)-g(x)$

0°) Exprimer s et d en fonction de x

1°) Donner le domaine de définition de f et celui de g. Donner ensuite celui de s et d.

2°) Tracer les courbes représentatives de f, g, s et d.

3°) Que dire des variations de s et d en fonction de celles de f et g ?

Définition : Soient deux fonctions f définie sur D_f et g définie sur D_g.
On appelle fonction somme de f et g, la fonction notée $f+g$ définie pour tout x de $D_f \cap D_g$ par : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
On appelle fonction différence de f et g, la fonction notée f-g définie pour tout x de $D_f \cap D_g$ par : $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

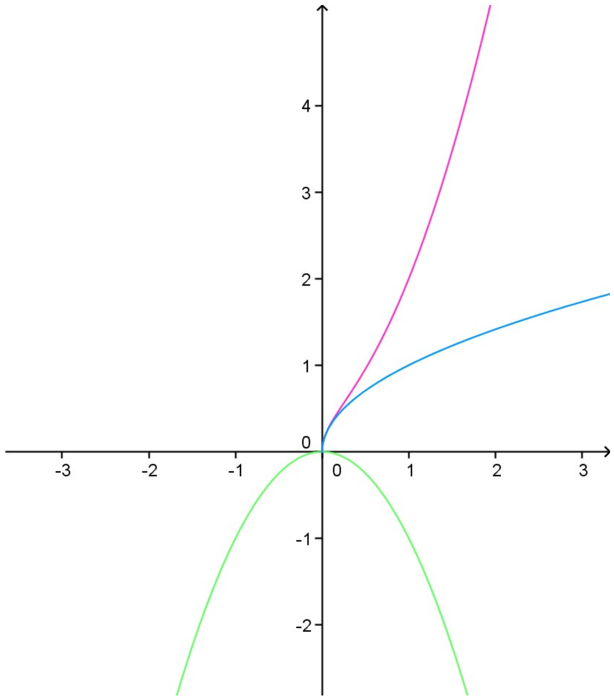
Exemple : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\sqrt{3-x}$. f est définie sur $[-2\ ;+\infty[$ et g est définie sur $]-\infty;3]$.
f+g est la fonction définie sur [-2 ; 3] par $(f+g)(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$.
f-g est la fonction définie sur [-2 ; 3] par $(f-g)(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{3-x}$.

Propriété : La courbe représentative de f+g est obtenue point par point à partir de celle de f et de celle de g, en additionnant les ordonnées des points ayant la même abscisse.
La courbe représentative de f-g est obtenue point par point à partir de celle de f et de celle de g, en soustrayant les ordonnées des points ayant la même abscisse.

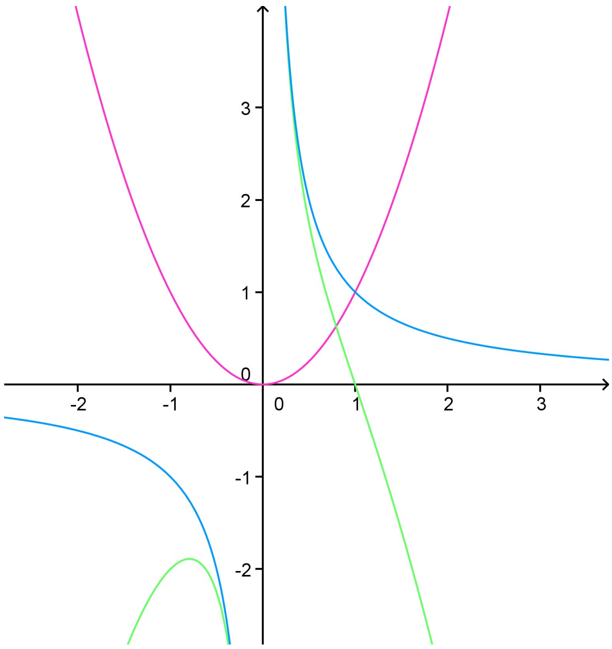
Propriété : Si f et g sont monotones de même sens de variation sur un intervalle I, alors f+g a le même sens de variation sur I.
Si f et g sont monotones de sens de variation contraires sur un intervalle I, alors f-g a le même sens de variation que f sur I.

Contre-exemple :
Par contre, on ne peut rien dire du sens de variation de la somme de deux fonctions n'ayant pas le même sens de variation.

$f(x)=x^2+\sqrt{x}$ et $g(x)=-x^2$



f(x)=x² et g(x)=-x²+ $\frac{1}{x}$



f(x)=x² et g(x)=-x²

2.3. Multiplication d'une fonction par un scalaire

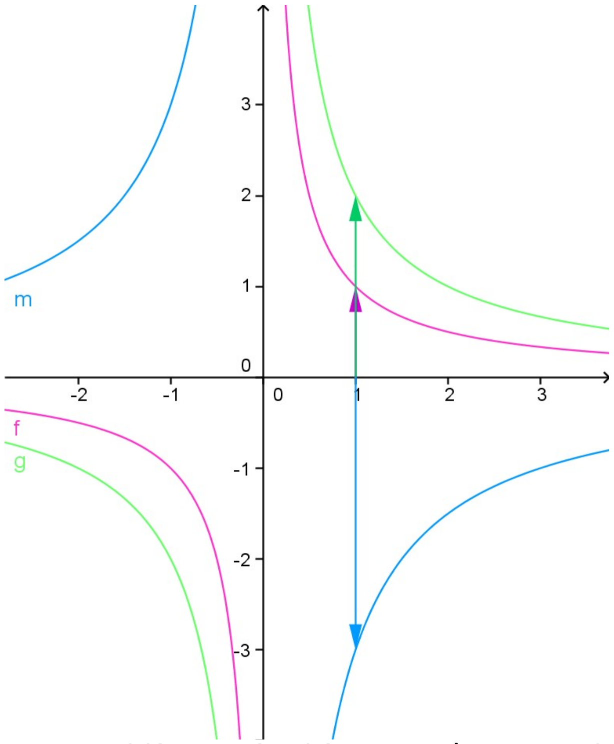
Exemple d'introduction 2 :
On considère les fonctions f : $x \longmapsto x^2$. Soit k un réel.
On note m : $x \longmapsto kf(x)$
0°) Exprimer m en fonction de x
1°) Donner le domaine de définition de f et celui de m.
2°) Tracer les courbes représentatives de f et m, dans le cas où k=2 et k=-2.
3°) Que dire des variations de f et m en fonction de celles de f et g ?

Définition : On appelle fonction produit d'un scalaire k par une fonction *f* définie sur D_f, la fonction g=kf définie sur D_f, pour tout x de D_f par : $(kf)(x)=kf(x)$.

Exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$. 2f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $(2f)(x)=\frac{2}{x}$.

Propriété : La courbe représentative de kf est obtenue point par point à partir de celle de f, en multipliant l'ordonnée des points de f par k tout en conservant la même abscisse.

Exemple : f(x)=x² g(x)=2/x m(x)=-3/x



<u>Propriété :</u> Si k est strictement positif, alors f et kf ont le même sens de variation.
Si k est strictement négatif, alors f et kf ont des sens de variations contraires.

<u>Preuve :</u> Soit f une fonction croissante, alors, pour x<x', on a : $f(x) \leqslant f(x')$ et donc si k>0, $kf(x) \leqslant kf(x')$, et donc kf est croissante, et si k<0, $kf(x) \geqslant kf(x')$, et donc kf est décroissante.
Soit f une fonction décroissante, alors, pour x<x', on a : $f(x) \geqslant f(x')$ et donc si k>0, $kf(x) \geqslant kf(x')$, et donc kf est décroissante, et si k<0, $kf(x) \leqslant kf(x')$, et donc kf est croissante.

2.4. Fonction valeur absolue.

<u>Définition :</u> On appelle fonction valeur absolue de f, la fonction u : x $\longmapsto \begin{cases} u(x)=f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ u(x)=-f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$. On note $u(x)=|f(x)|$.

Propriété : La courbe de u et celle de f sont identiques pour les valeurs de x telles que $f(x) \geqslant 0$ et sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour les valeurs de x telles que : $f(x) \leqslant 0$.

3. (Dé)composition de fonctions.

<u>Exemple d'introduction 3 :</u>
On considère les fonctions f : x $\longmapsto \sqrt{x}$ et g : x $\longmapsto$ 2x+3
On note c : x $\longmapsto$ f(g(x)) et d : x $\longmapsto$ g(f(x))
0°) Exprimer c et d en fonction de x
1°) Donner le domaine de définition de f, g, c et d.

<u>Définition :</u> On appelle fonction composée de f suivie de g et on note $g \circ f$, la fonction définie par x $\longmapsto$ g(f(x)).
On a : $g \circ f$: x $\longmapsto$ f(x) $\longmapsto$ g(f(x))

<u>Remarques :</u> 1. Il faut être prudent avec la notation $g \circ f$. Et de bien distinguer $g \circ f$ de $f \circ g$. Voir l'exemple d'introduction pour cela.
2. Soit h :x $\longmapsto \dfrac{1}{3x^2+1}$. Alors h est la composée de x $\longmapsto$ 3x²+1 suivie de x $\longmapsto \dfrac{1}{x}$.
3. Il faut être très prudent avec le domaine de définition d'une fonction composée. Soit D_f le domaine de définition de f et D_g le domaine de définition de g. On considère f(D_f) , l'image de D_f par f. Alors le domaine de définition de $g \circ f$ est donné par l'intersection de f(D_f) avec D_g.

Propriété : La composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante.
La composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante

Preuve : Soient u et v deux fonctions croissantes.
Pour x<x', on a $v(x) \leqslant v(x')$, et donc puisque u est croissante : $u(v(x)) \leqslant u(v(x'))$
Soient u et v deux fonctions décroissantes.
Pour x<x', on a $v(x) \geqslant v(x')$, et donc puisque u est décroissante : $u(v(x)) \leqslant u(v(x'))$
Soient u croissante et v décroissante.
Pour x<x', on a $v(x) \geqslant v(x')$, et donc puisque u est croissante : $u(v(x)) \geqslant u(v(x'))$
Soient u décroissante et v croissante.
Pour x<x', on a $v(x) \leqslant v(x')$, et donc puisque u est décroissante : $u(v(x)) \geqslant u(v(x'))$

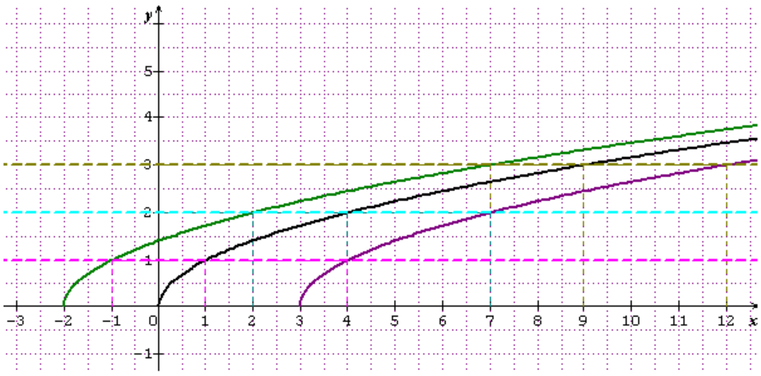
Remarque : La composition de fonction est associative, ie : $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$ et l'on note donc: $u \circ v \circ w$.

Savoir décomposer une fonction en fonctions de référence :
Exemple : $f(x) = \sqrt{|x^2-2|}$.
On a : $x \xrightarrow{u} x^2 \xrightarrow{v} x^2-2 \xrightarrow{w} |(x^2-2)| \xrightarrow{t} \sqrt{|(x^2-2)|}$, où : *u* : $x \longmapsto x^2$, v : $x \longmapsto x$-2, *w* : $x \longmapsto$ $|(x)|$, *t* : $x \longmapsto$ $\sqrt{x}$
Et donc $f = t \circ w \circ v \circ u$

4. Fonctions associées

4.1. Étude comparative de *f* et de *g*: $x \longmapsto f(x+\alpha)$

Exemple 4 : Étude comparative de $x \longmapsto$ $\sqrt{x}$; x $\longmapsto$ $\sqrt{x+2}$ et x $\longmapsto$ $\sqrt{x-3}$
Donner le domaine de définition de ces trois fonctions.
Tracer les courbes représentatives de x $\longmapsto$ $\sqrt{x}$; x $\longmapsto$ $\sqrt{x+2}$ et x $\longmapsto$ $\sqrt{x-3}$.
Tracer plusieurs droites d'équation y=k avec k positif. Que constatez vous ?



Propriété : Soit *f* une fonction sur D_f et C_f sa courbe représentative.
Soit *g* la fonction définie par $x \longmapsto f(x+\alpha)$, définie sur D_g et C_g sa courbe représentative.
Alors C_g est obtenue à partir de C_f par translation de vecteur -α $\vec{i}$.
D_g est obtenue à partir de D_f par « translation de -α ».

Démonstration : Soit $M'(x;y)$ un point de la représentation graphique de g. Alors, on a :

$$M' \in C_g \Leftrightarrow y = f(x+\alpha) \Leftrightarrow M(x+\alpha;y) \in C_f ,$$

et donc $\overrightarrow{MM'}(x-(x+\alpha);y-y)$ $\overrightarrow{MM'}(-\alpha;0)$.
M' est donc le translaté de M par la translation de vecteur -α $\vec{i}$.

Remarque : En pratique, si $D_f = [a;b]$, alors $D_g = [a-\alpha;b-\alpha]$
En effet, pour pouvoir calculer f(x+α), il faut que $x+\alpha \in [a;b]$, c'est à dire $x \in [a-\alpha;b-\alpha]$

Propriété : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$. Alors la fonction g définie par x $\longmapsto$ f(x+□) sur $[a-\alpha;b-\alpha]$ a le même sens de variation que f sur $[a;b]$ .Exemple : On considère *f* : $x \longmapsto x^2$

et $g : x \longmapsto (x+2)^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4.2. Étude comparative de f et de h: $x \longmapsto f(x)+\beta$.

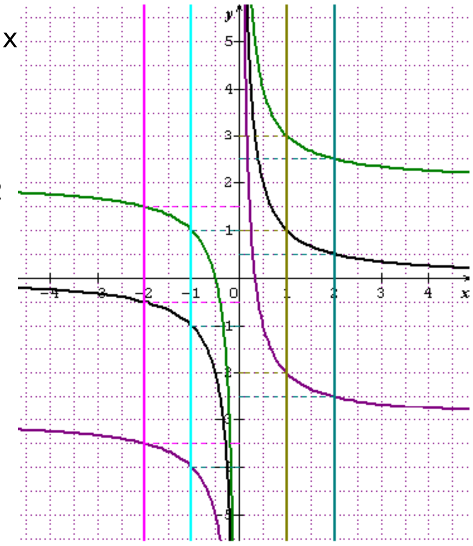
Exemple 5 : Étude comparative de $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \frac{1}{x}+2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}-3$.

Donner le domaine de définition de ces trois fonctions.

Tracer les courbes représentatives de $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \frac{1}{x}+2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}-3$.

Tracer plusieurs droites d'équation x=k.

Que constatez vous ?



Propriété : Soit f une fonction sur D_f et C_f sa courbe représentative.

Soit g la fonction définie par $x \longmapsto f(x)+\beta$, définie sur D_g et C_g sa courbe représentative.

Alors C_g est obtenue à partir de C_f par translation de vecteur $\beta\ \vec{j}$.

D_g correspond à D_f

Démonstration : Soit $M'(x\,;y)$ un point de la représentation graphique de g. Alors, on a :

$$M'\in C_g \Leftrightarrow y=f(x)+\beta \Leftrightarrow \Leftrightarrow y-\beta=f(x) \Leftrightarrow M(x\,;y-\beta)\in C_f\ ,$$

et donc $\overrightarrow{MM'}(x-x\,;y-(y-\beta))$ $\overrightarrow{MM'}(0\,;\beta)$

M' est donc le translaté de M par translation de vecteur $\beta\ \vec{j}$.

Propriété : Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. Alors la fonction g définie par $x \longmapsto f(x)+\beta$ sur $[a\,;b]$ a le même sens de variation que f sur $[a\,;b]$.

Exemple : On considère $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^2+5$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$

4.3. Étude comparative de f et de k: $x \longmapsto f(x+\alpha)+\beta$.

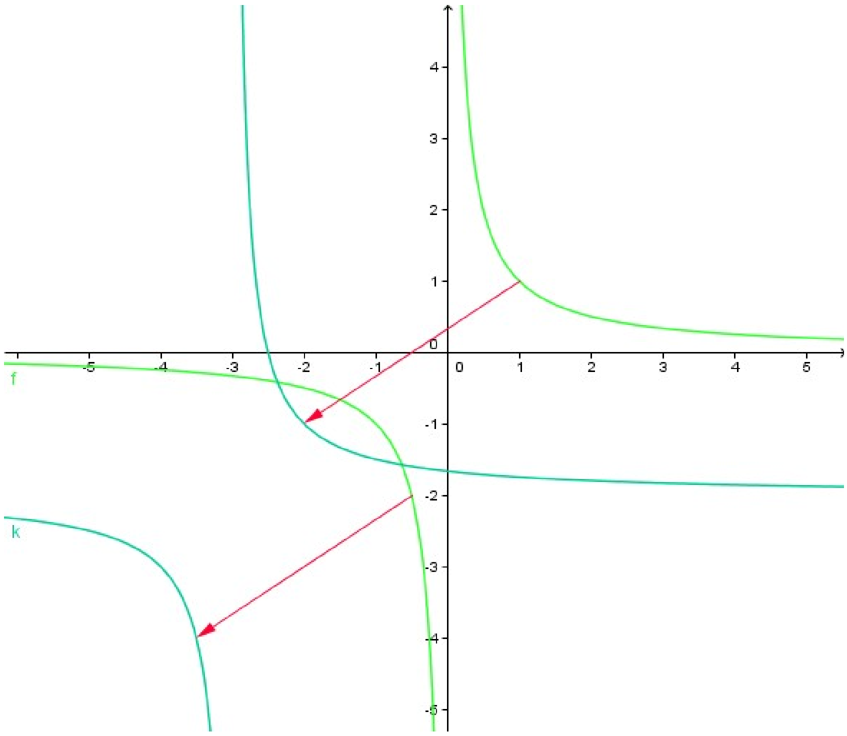
Propriété : Soit f une fonction sur D_f et C_f sa courbe représentative.

Soit k la fonction définie par $x \longmapsto f(x+\alpha)+\beta$, définie sur D_k et C_k sa courbe représentative.

Alors C_k est obtenue à partir de C_f par translation de vecteur $-\alpha\ \vec{i}\ +\beta\ \vec{j}$.

D_k est obtenue à partir de D_f par « translation de $-\alpha$ ».

Exemple : Courbe représentative de $k : x \longmapsto \frac{1}{x+3}-2$.


f
k
0